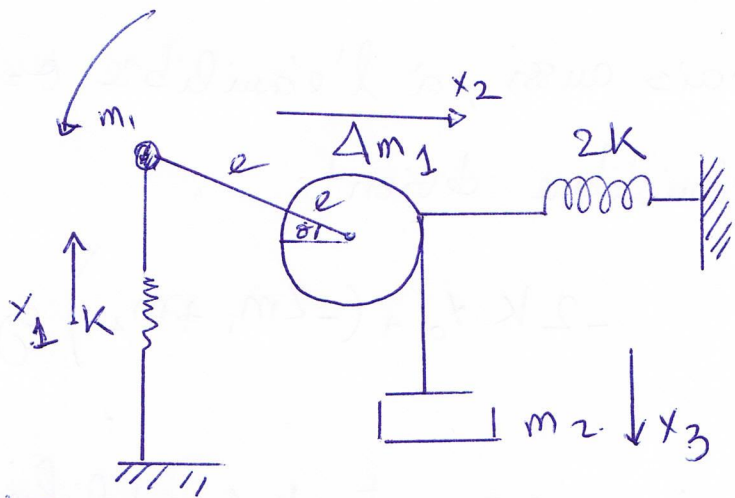


Solution de l'examen (2)

final ov.

Exo1: (06pts):



1. L'énergie Potentielle du système-

$$U = \frac{1}{2} 2k (x_2 + x_0)^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + m_1 g x_1 - m_2 g x_3$$

avec:

$$x_1 = -2l \sin \alpha \approx -2l \alpha$$

$$x_2 = -l \tan \alpha \approx -l \alpha$$

$$x_3 = -l \alpha$$

1,5pb

- En remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U:

$$U = k(-l\theta + x_0)^2 + \frac{1}{2}k(-2l\theta)^2 + m_1g(-2l\theta) - m_2g(+l\theta)$$

$$U = 3k l^2 \theta^2 + (-2k x_0 + (-2m_1 + m_2)g) l \theta + k x_0^2$$

0,5pts

2. A l'équilibre = $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$

$$\Rightarrow 6k l^2 \theta + (-2k x_0 + (-2m_1 + m_2)g) l = 0$$

0,25

mais aussi, à l'équilibre $\theta = 0$; donc la condition d'équilibre devient:

$$-2k x_0 + (-2m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{(-2m_1 + m_2)g}{2k}$$

0,25

- ce qui nous permet de simplifier l'expression de U:

$$U = 3k l^2 \theta^2 + k x_0^2$$

0,25

3) Pour que: $x_0 = 0$; on doit avoir:

$$x_0 = \frac{(-2m_1 + m_2)g}{2k} = 0 \Rightarrow -2m_1 + m_2 = 0$$

$$m_2 = +2m_1$$

0,25

4) L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique de la Poulie et la tige ; plus l'énergie cinétique (la tige de Rotation) de Translation de la masse attachée au fil :

avec: $m_1 = \frac{m}{2}$; $m_2 = m$ et $x_0 = 0$.

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2$$

où: $I = \frac{1}{2} (2m) l^2 + m \frac{1}{2} (2l)^2 = 3m l^2$ et $x_3 = -l\theta$

$\Rightarrow \dot{x}_3 = -l\dot{\theta}$; en a donc: $T = \frac{1}{2} (3m l^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (-l\dot{\theta})^2$

$$T = 2m l^2 \dot{\theta}^2$$

- Le lagrangien s'écrit:

$$L = T - U = 2m l^2 \dot{\theta}^2 - 3k l^2 \theta^2$$

5) - L'équation du mouvement avec le lagrangien:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 4m l^2 \ddot{\theta} + 6k l^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3k}{2m} \theta = 0$$