Université Mostefa BENBOULAID- BATNA2

Socle Commun en Sciences et Technologie Année 2023/2024

Matière : M1

Série DE TD No.04

Exo 01 :

Dans l'ensemble E=R-$\{-1\}$, on considère la loi * donnée par :

$$(\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{E}) \quad \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{ab}$$

1) Déterminer les réels α et β tel que 1+a+b+ab=$(1+\alpha)(1+\beta)$
2) Montrer que la loi est interne dans E
3) Montrer que (E,*) est Groupe Abélien

Exo 02 : On définit sur l'ensemble]-1 ,1[, la relation T tel que :

$$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = \frac{x+y}{1+xy} \qquad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[^2$$

1) Montrer que T est une loi de composition interne dans]-1,1[
2) Montrer que ($]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[;*)$ est un Groupe Abélien

Exo 03 : On munit R_+^* ,de la loi de composition interne * définie par :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}_+^* \qquad \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$$

1) Montrer que * est commutative , associative ,et que 0 est l'élément neutre
2) Montrer qu'aucun élément de R_+^* n'a de symétrie pour *.

Exo 04 : *Montrer que l'ensemble :* $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}.\mathbf{3}^{\boldsymbol{m}} ; (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) \in \boldsymbol{Z}^2\}$

Est un sous groupe de $(\boldsymbol{R}^*, \ .)$

Exo 05 *:Soit* **(R ,+)** un groupe abélien et Ø une application définie par :

$$\emptyset : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

$$\mathbf{x} \to \emptyset(x) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \quad ; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}$$

-Déterminer une loi "∇" *telle que* Ø soit un isomorphisme de **(R ,+)** vers *Soit* **(R , ∇).**

-Quelle est la structure algébrique de **(R , ∇)** et déterminer l'élément neutre de la structure s'il existe .

Exo 06 :

On munit dans $Z^2 = Z.Z$; on définit deux lois de compositions internes « + » et « * » par :

$$(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}) + (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}) = (\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \ ; \ \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2})$$

$$(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}) * (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}) = (\mathbf{x_1}.\mathbf{x_2} \ ; \ \mathbf{0})$$

1) **Montrer que $(\mathbf{Z}^2, +, *)$ admet une structure d'anneau commutatif**
2) **Est-ce que $(\mathbf{Z}^2, +, *)$ répond a la définition d'un anneau unitaire**