Université Moustapha ben Boulaid Batna2

Faculté des Sciences et technologie
Filière Génie des Procédés (GP)
2ème année LMD :

Notions des Phénomènes de Transfert

2018/2019

Notions des Phénomènes de Transfert

Programme

Notions des Phénomènes de Transfert

Introduction aux phénomènes de transfert
Définitions

I.1 Différents phénomènes de transfert

a) Transfert de chaleur (thermique)

b) Transfert de matière (massique)

c) Transfert de quantité de mouvement

I.2 Différents modes de transfert

a) Transfert par conduction

b) Transfert par convection

c) Transfert par rayonnement

Définitions

Un phénomène de transfert (ou phénomène de transport) est un **phénomène irréversible** durant lequel une **grandeur physique est transportée** par le biais de molécules et qui **a pour origine l'inhomogénéité d'une grandeur intensive**. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques à rendre uniformes ces grandeurs qui provoquent le transport.

L'étude de chaque phénomène de transport se réfère à une certaine entité (caractéristique) transférée,

par exemple : la quantité de mouvement nécessaire pour augmenter la vitesse d'un fluide, la chaleur afin de vaporiser un liquide et la masse du liquide transportée dans une conduite ou la dispersion d'un liquide coloré au sein d'un autre liquide transparent.

Les grandeurs physiques transférées les plus connues sont la chaleur (transfert thermique), la matière (transfert de masse) et la quantité de mouvement.

Les corps qui assurent le transfert de ces grandeurs physiques sont appelés porteurs de charge.

I.1 Différents phénomènes de transfert

Les phénomènes de transfert les plus connus sont :

a) Transfert de chaleur (thermique) : Pour lequel la grandeur transférée est la chaleur (Température), ce transfert s'effectue entre deux zones où règnent des températures différentes : il se fait toujours de la température la plus élevée vers la température la plus basse (moins élevée). La différence de température est appelée : la **force motrice** du transfert thermique.

b) **Transfert de masse (de matière)** : Pour lequel la grandeur transférée est la matière (Concentration massique), ce transfert s'effectue entre deux zones où règnent des concentrations massiques différentes, il se fait toujours de la concentration plus élevée vers la concentration la plus faible. La différence de concentration est appelée: **la force motrice** du transfert de masse.

c) Transfert de de quantité de mouvement: Pour lequel la grandeur transférée est la quantité de mouvement (Vitesse), ce transfert s'effectue entre deux entités qui possèdent des vitesses différentes, il se fait toujours de l'entité qui a la vitesse la plus élevée vers celle qui a la vitesse la plus faible. La différence de vitesse appelée: la **force motrice** du transfert de quantité de mouvement.

I.2 Différents modes de transfert

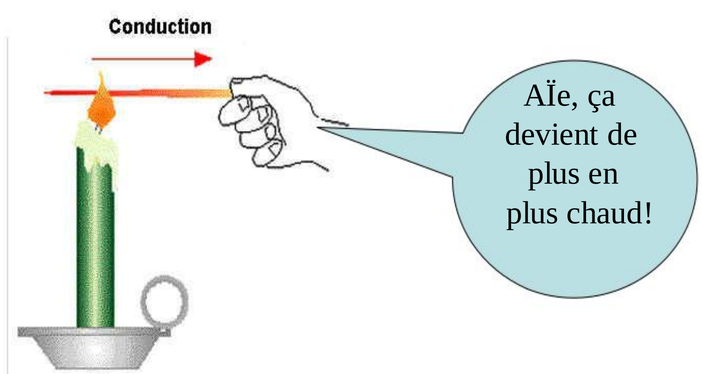
On distingue trois modes de transfert :

a) **Transfert par conduction (diffusion moléculaire pour le TM)** : La conduction est un mode de transfert d'énergie thermique qui ne nécessite pas de mouvements de matière. La chaleur est transférée de proche en proche par simple agitation des atomes. Plus la différence de température (**force motrice**) entre deux matériaux est importante, plus ce transfert sera efficace. Par contre, il dépend aussi de la conductivité thermique des matériaux.

Donc **le transfert de chaleur**, il se fait à partir d'un contact direct entre **deux solides immobiles** portés à **deux températures différentes**.

Exemples:

- Un enfant qui touche une tige métallique chaude, la chaleur passe directement de la tige à la main de l'enfant car il y'a un gradient de température entre la tige métallique et la main de l 'enfant



Pas de déplacement de matière

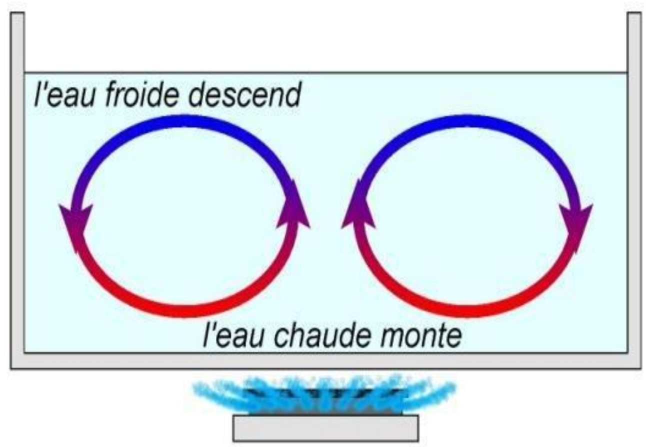
Transfert par convection : l'échange de chaleur entre une surface et un fluide mobile à son contact, ou le déplacement de chaleur au sein d'un fluide par le mouvement d'ensemble de ses molécules d'un point à un autre. Dans le processus de convection, la chaleur se déplace comme toujours des zones chaudes vers les zones froides.

- La convection = transfert de chaleur avec transfert de matière.
- Phénomène très usuel (météo, chauffage domestique...)
- Ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages), géologiques (remontées de magma).

Exemples:

- C'est par convection que la chaleur, transmise à de l'eau à l'intérieur d'une chaudière, est transportée jusqu' aux différentes pièces d'un appartement.

- C'est par convection qu'un produit chimique est transporté du réservoir dans lequel il est stocké jusqu'à l'appareil dans lequel il est utilisé.



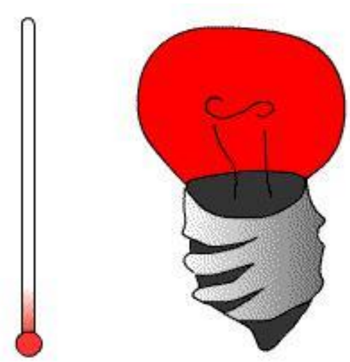
a) Transfert par Rayonnement : le rayonnement constitue un mode original du transfert, spécifique à l'énergie thermique. Un point matériel chauffé émet un rayonnement électromagnétique

dans toutes les directions, lorsque ce rayonnement frappe un corps quelconque, ce dernier peut en réfléchir une partie et en absorber une autre sous forme de chaleur qu'il va utiliser pour élever sa température. Ce type de transport de chaleur est analogue à la propagation de la lumière et ne nécessite aucun support matériel contrairement aux deux premiers modes de transfert. Les gaz, les liquides et les solides sont capables d'émettre et d'absorber les rayonnements thermiques.

Exemples:

- La chaleur que reçoit la terre à partir du soleil se fait grâce aux rayonnements.

- Les plats sont chauffés dans un four à micro-ondes grâce à la chaleur transportée par des rayonnements micro-ondes.



A distance qu'il y ait ou non de la matière

II. Généralités Sur Les Transferts De Chaleur

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

II.1 Définitions

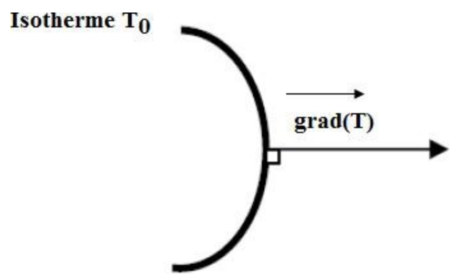
II.1.1 Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : T = f (x,y,z,t). La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

II.1.2 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :



$$\overrightarrow{grad(T)} = \vec{n}\frac{\partial T}{\partial n}$$

Fig. 2 : Isotherme et gradient thermique Avec : → n vecteur unitaire de la normale ∂T/∂n dérivée de la température le long de la normale

II.1.3 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\Phi = \frac{1}{S}\frac{dQ}{dT}$$

Où S est l'aire de la surface (m^2).

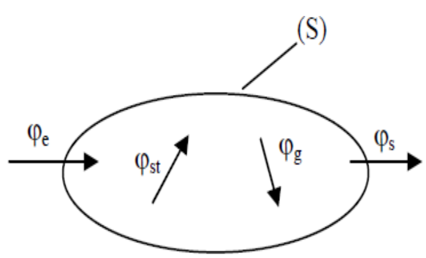
On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps

$$\varphi = \frac{dQ}{dT}$$

II.2 Formulation d'un problème de transfert de chaleur

II.2.1 Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :



φ_{st} : Flux De chaleur stocké
φ_g : Flux de chaleur généré — dans le système (S)
φ_e : Flux de chaleur entrant
φ_s :Flux de chaleur sortant

Fig.3 : Système et bilan énergétique

Pour déterminer le flux de chaleur global, on applique le 1er principe de la thermodynamique afin d'établir le bilan d'énergie du système (S) :

On obtient alors :

$$\boxed{\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st}}$$

II.2.2 Expression des flux d'énergie

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

II.2.2.1 Conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda\, S\, \overrightarrow{grad}(T)$$

En général

$$\varphi = -\lambda\, S \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

Avec :

φ : Flux de chaleur transmis par conduction (W)

λ :Conductivité thermique du milieu ($W\ m^{-1}\ °C^{-1}$)

x :Variable d'espace dans la direction du flux (m)

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)

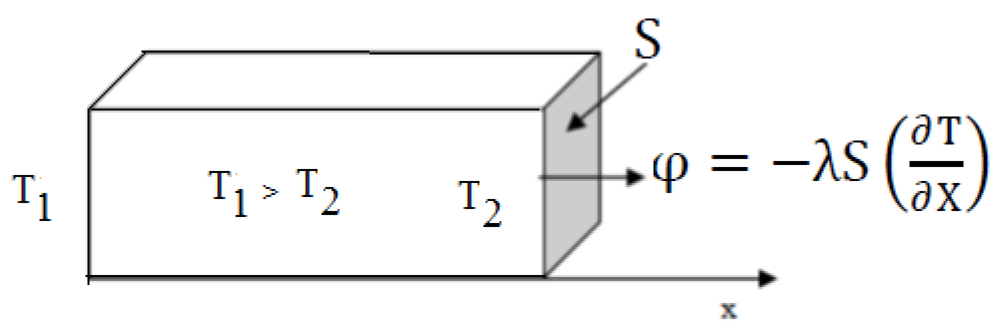


Fig.4: Schéma du transfert de chaleur conductif

On trouvera dans le tableau 3 les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux parmi les plus courants.

Tableau 3 : Conductivité thermique de certains matériaux

Matériau	λ ($W.m^{-1}.\ °C^{-1}$)	Matériau	λ ($W.m^{-1}.\ °C^{-1}$)
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Brique terre cuite	1,1	Polystyrène extrudé	0,028
Verre	1,0	Air	0,026
Eau	0,60	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045

II.2.2.2 Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide.

La convection thermique est le transfert d'énergie entre deux milieux, dont l'un au moins est un fluide, par un déplacement moléculaire. Il implique les effets combines de la conduction et du mouvement du fluide. En l'absence de mouvement du fluide, le transfert de chaleur est assure exclusivement par la conduction pure. Indépendamment de la nature de la convection (libre ou forcée), le flux de chaleur est exprime par la loi de Newton de refroidissement :

$$\dot{Q} = h\, A_P \left(T_P - T_\infty\right)$$

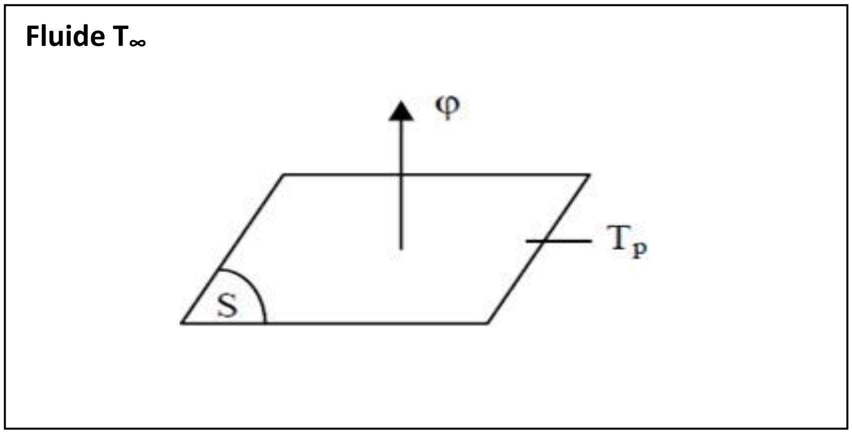


Fig. 5 : Schéma du transfert de chaleur convectif

Avec :

φ :Flux de chaleur transmis par convection (W)

h :Coefficient de transfert de chaleur par convection $(W\ m^{-2}\ °C^{-1})$

Tp : Température de surface du solide (°C)

T_∞ :Température du fluide loin de la surface du solide (°C)

Ap Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2)

Exemple 1 : Soit un fil traversé par un courant électrique d'une intensité I=1,5 A. Lorsque ses dimensions sont respectivement D=3 mm et L=2 m, la différence de potentiel entre les bornes est de 60 Volts. Si la température du milieu extérieur est de 15ºC, calculer le coefficient h pour que le fil préserve une température $T_P \leq 150$ ºC ?

Solution : La puissance consommée dans le fil électrique est :

$$P = U * I = 60*1,5 = 90\ Watt.$$

La surface d'échange est la surface latérale du fil électrique :

$$A_p = \pi D * L = 3,14*2*3*10^{-3} = 18,8510^{-3}\ m^2$$

Conformément au principe de la conservation de l'énergie, on a :

$$P = \dot{Q}_{Conv} = hA_p\left(T_p - T_\infty\right) \qquad \Rightarrow$$

$$h = \frac{P}{A_p\left(T_p - T_\infty\right)} = \frac{90}{18{,}85*10^{-3}\,(150-15)} = 35{,}367\ W/(m^2 * K)$$

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

II.2.2.3 Rayonnement

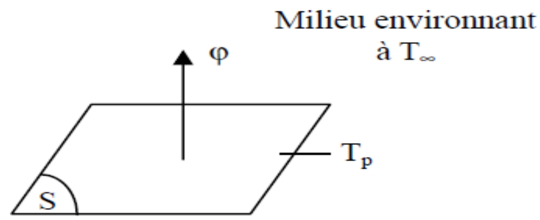


Fig.6 : Schéma du transfert de chaleur radiatif

Le rayonnement c'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation suivante :

$$\boxed{\upsilon = \sigma\, \varepsilon_p S(T_p^{\,4} - T_\infty^{4})}$$

Avec:

υ: flux de chaleur transmise par rayonnement (W);

σ: constante de Stefan (5,67.10^{-8}W m^{-2}K^{-4}) ;

ε_p Facteur d'émission de la surface

T_p Température de la surface (**K**)

T_∞ Température du milieu environnant la surface (**K**)

S Aire de la surface (m2)

II.2.2.4 Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) :

$$\varphi_{st} = \rho V c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

Avec :

φ_{st} :Flux de chaleur stocké (W)

ρ : Masse volumique (kg m^{-3})

V : Volume (m3) ; c Chaleur spécifique (J kg^{-1} $°C^{-1}$)

T : Température (°C) : t Temps (S)

Le produit ρVc est appelé la capacitance thermique du corps.

II.2.2.5 Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) *est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :*

$$\varphi_g = \dot{q} V$$

Avec :

ϕ_g Flux d'énergie thermique générée (W)

$\dot{q}$ Densité volumique d'énergie générée (W m^{-3})

V Volume (m^3)

II.3 Transfert de chaleur par conduction en régime Permanent

II.3.1 L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

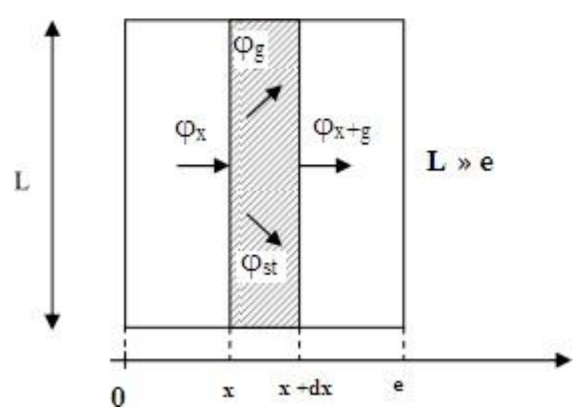


Fig. 6 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+g} + \varphi_{st}$$

Avec

$$\varphi_x = -\lambda\, S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \qquad et \qquad \varphi_{x+dx} = -\lambda\, S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\varphi_g = \dot{q}\,V$$

$$\varphi_{st} = \rho\, c\, S\, dx\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx, nous obtenons :

$$\frac{\lambda\, S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \lambda\, S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q}\, S = \rho\, c\, S\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\, S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right) + \dot{q}\, S = \rho\, c\, S\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right) + \dot{q} = \rho\, c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$

c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{d\lambda}{dT}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \rho\, c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a\nabla^2 T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

Le rapport $a = \lambda / c\rho$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$a\nabla^2 T = 0$$

II.3.2 Transfert unidirectionnel

II.3.2.1 Mur simple

On se placera dans le cas où le transfert de chaleur est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e, de conductivité thermique λ et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :

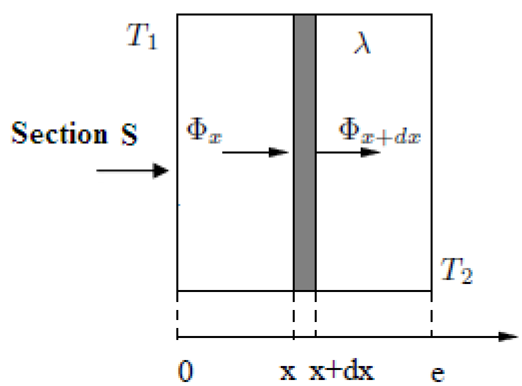


Fig.7 : Bilan thermique élémentaire sur un mur simple

En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et x + dx, En régime stationnaire :

Le flux thermique est conservé à travers les différentes sections droites du solide. Pour une plaque plane de largeur L, on a :

$$Q_{cond} = -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right) = C_1$$

En supposant que la conductivité thermique du matériau est constante, l'intégration de cette équation différentielle ordinaire permet d'établir le profil de la température qui est une droite dont l'allure est :

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

En utilisant les conditions aux limites de part et d'autre de la paroi, on a :

$$C.L.1: \quad x = 0, \quad T = T_0 \quad \Rightarrow C_2 = T_0$$

$$C.L.2: \quad x = L, \quad T = T_L \quad \Rightarrow C_1 = \frac{T_L - T_0}{L}$$

D'où le profil recherché :

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0$$

Et le flux thermique entre les deux faces est :

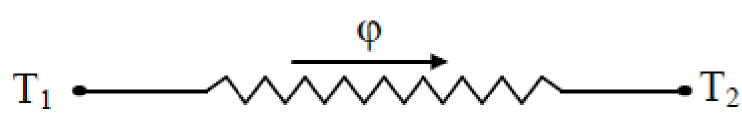
$$Q = -\lambda * A * \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda A}{L}(T_0 - T_L)$$

Pour un matériau composite dont le nombre de couches est n, le flux thermique à travers les différentes lamelles du mur a pour expression :

$$Q = \frac{\lambda_i A}{L_i}(T_{i-1} - T_i) = Cste$$

La relation précédente peut également se mettre sous la forme :

cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme e/Sλ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e, de conductivité thermique λ et de surface latérale S. On se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la Fig.8.



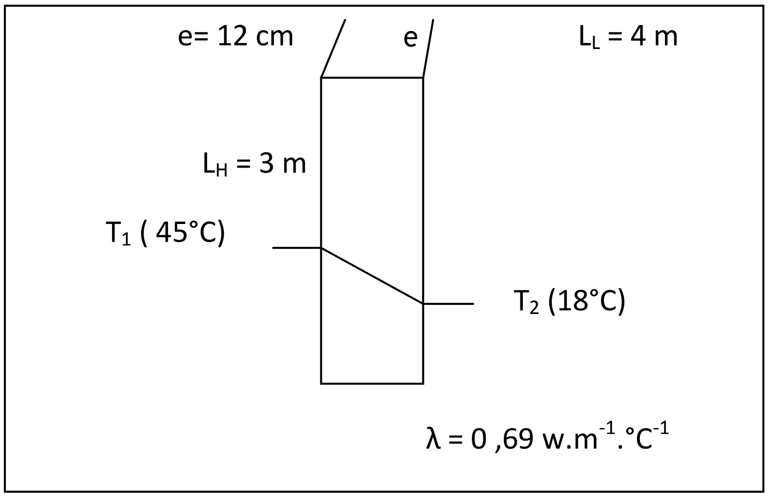
Avec

Fig.8 : Schéma électrique équivalent d'un mur simple

Exemple 2 :

Calculer la perte calorifique au travers d'un mur en briques de 12 cm d'épaisseur, 3 m de hauteur et de 4 m de largeur. Les températures des deux faces du mur sont respectivement de 45°C et de 18°C. (λ = 0,69 W/m.°C)

Corrigé :



La densité du flux de Conduction en régime permanent : Φ est constant

Φ .dx = φ.S = - $\Rightarrow \Phi$ .dx = -.dT $\Rightarrow \Phi\int \int$

$\Rightarrow \Phi.e = \lambda.S(T_1 - T_2)$ donc

$$\Phi = \frac{(\ )}{}$$

A.N. $\Phi = \frac{(\ )}{} = 1863$ watt

Mur multicouches

C'est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S:Les surfaces isothermes sont planes et parallèles, la résistance d'un mur s'écrit R = e /λS avec e, épaisseur du mur et S sa surface.

D'où

$$\sum — \quad — \quad —$$

Alors le flux υ échangé lors de la traversée du mur multicouche est donné par la relation:

$$\upsilon(W) = \frac{\qquad}{— \quad — \quad —}$$

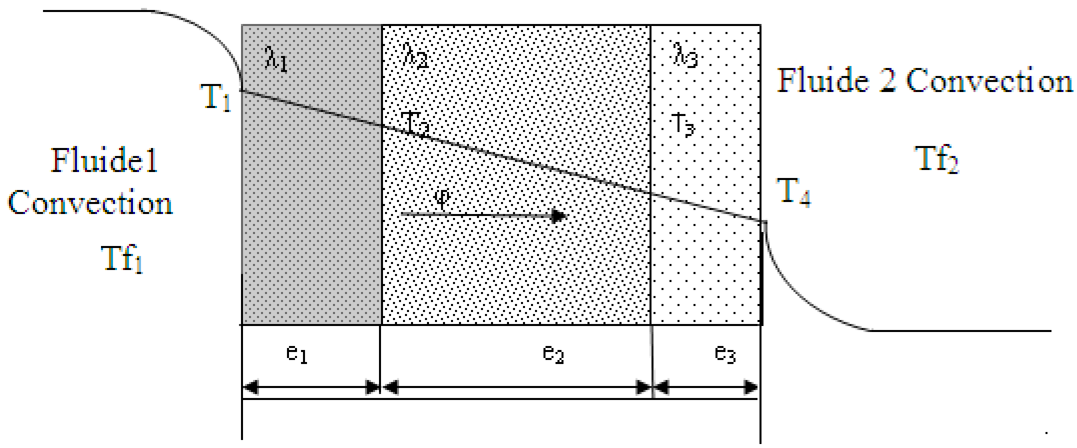


Fig.7 : flux et températures dans un mur multicouches

Nous avons considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuités de températures aux interfaces. En réalité, compte tenu de la rugosité de surfaces, une. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une micro-couche d'air existe entre les creux des surfaces en regard et il créa une résistance thermique R (l'air est isolant) appelée résistance thermique de contact.

Exemple 3 :

Le mur d'un four comporte trois couches de matériaux différents accolées les unes aux autres (en serie) :

- Une couche de briques réfractaires (λ = 1,21 W/m.°C);
- Une couche de revêtement calorifuge (λ = 0,08 W/m.°C);

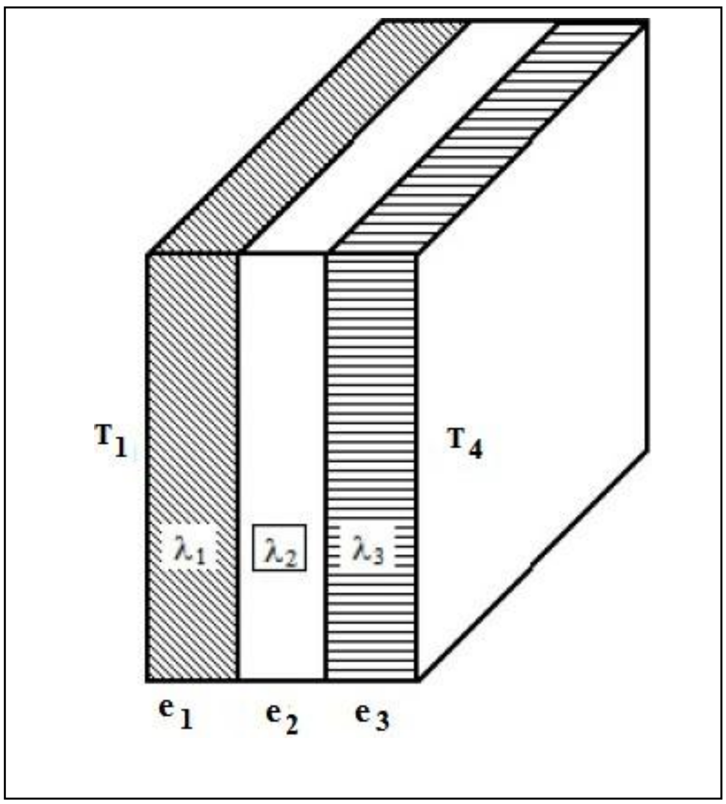
- Une couche de briques (λ = 0,69 W/m.°C).

Chaque couche a une épaisseur de 10 cm. La température est de 872°C à l'intérieur du four et de 32°C à l'extérieur.

1. Si la surface du mur est de 42 m^2, calculer la perte calorifique par conduction pendant 24 heures en joule.
2. Quelle est la température T_m au milieu du revêtement ?

Corrigé :

1) Calcul de la perte calorifique



La conduction à travers un mur composites en régime permanent : Φ est constant

$$\Phi = \varphi.S = - \_\_$$

On intègre pour chaque épaisseur l'équation de flux de chaleur chaque valeur de λ constante

$\Phi \int \int$ on aura $\Phi.e_1 = \lambda.S_1(T_1-T_2)$

Puisque Φ est constant nous pouvons écrire :

$\Phi =$

Finalement

$\Phi =$

A.N. $\Phi =$ **Φ = 23,877 Kw**

La perte calorifique par conduction pendant 24 heures ce n'est que Φ .24 h .

D'où Φ = 24*23.877 = **573,048 kw.h**

Sachant que, Un kilowattheure vaut 3 600 kilojoules.

Φ = 573,048*3600*1000= **$2{,}06 \cdot 10^9$ J**

2) Pour calculer Tm il est impératif de calculer T_2 et T_3 car Tm se trouve entre les deux températures.

$T_2 = T_1 - \Phi$; $T_3 = T_4 + \Phi$ et $T_m =$

T_2 = **825 °C ;** T_3 **=114.4 °C** T_m = **469,7 °C**

Section cylindrique

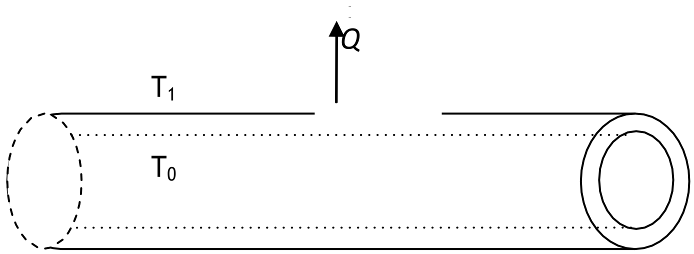


Fig.8 : Schéma de transfert dans un cylindre creux

En régime stationnaire, le flux thermique est conservé à travers les différentes couches cylindriques du solide. Pour un cylindre d'épaisseur dr et de longueur L, le flux thermique s'écrit :

$$\phi = -\lambda A \left(\frac{dT}{dr} \right) = C_1$$

$$avec \quad A = 2\pi r L$$

En supposant que la conductivité thermique du matériau est constante, l'intégration de cette équation différentielle ordinaire permet d'établir le profil de la température dont l'allure est :

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

En utilisant les conditions aux limites de part et d'autre de la paroi du cylindre, on a :

$$C.L.1: \quad r = R_0, \qquad T = T_0 \qquad \Rightarrow T_0 = C_1 \ln R_0 + C_2$$

$$C.L.2: \quad r = R_1, \qquad T = T_1 \qquad \Rightarrow T_1 = C_1 \ln R_1 + C_2$$

Il en découle que le profil de température suit une loi logarithmique avec :

$$C_1 = \frac{T_1 - T_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \qquad et \qquad C_2 = T_0 - \frac{T_1 - T_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \ln R_0$$

et le flux thermique entre les deux faces est :

$$\phi = -\lambda * A * \frac{dT}{dx} = -2\pi r L \lambda \frac{dT}{dr}$$

$$\phi = 2\pi L \lambda \frac{T_0 - T_1}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)}$$

Pour un matériau composite dont le nombre de couches est n, le flux thermique à travers les différentes couches cylindriques a pour expression :

$$\phi = 2\pi L\lambda_i \frac{T_{i-1} - T_i}{\ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)}$$

En résolvant par rapport à l’écart de températures pour les différents matériaux, on a :

$$(T_0 - T_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\phi}{L}\frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

$$(T_1 - T_2) = \frac{1}{2\pi}\frac{\phi}{L}\frac{1}{\lambda_2}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$(T_{n-1} - T_n) = \frac{1\ Q\ 1}{2\pi\ L\ \lambda_n}\ln\left(\frac{R_n}{R_{n-1}}\right)$$

Par addition membre à membre, la différence de température entre les bornes extrêmes des sections du tube cylindrique s’écrit :

$$(T_0 - T_n) = \frac{\phi}{2\pi L} * \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}\right)_i * \ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

De façon analogue, la résistance thermique de la tranche (sandwich) i est:

$$Rt_i = \frac{1}{2\pi L\lambda_i}\ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

Par conséquent, la résistance globale Rt_G d’un mur composite est :

$$Rt_G = \frac{1}{2\pi L}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

Exemple 4 :

Une conduite cylindrique en acier à conductivité thermique = 46 W/m.ºC, de diamètre intérieur Ø1 =44 mm et extérieur Ø2 =54mm, transporte un fluide chaud.

Calculez le flux de chaleur perdu par mètre de longueur pour un écart de température de 1ºC entre les surfaces internes et externes de la canalisation.

Solution

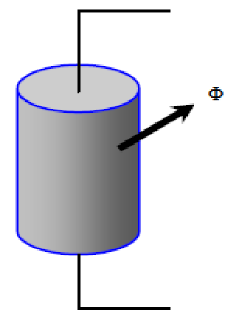
$d\Phi = - S\,\mathrm{grad}T = - S = - 2\pi r L$

Séparation de variable

$\int \quad \int$

$\int \int$ $= 1410{,}58$ w/m

Exemple 5 :



Une résistance électrique de forme cylindrique, de longueur 1,5cm et de diamètre 0,4cm, est utilisée dans un circuit électrique. Cette résistance dissipe une puissance de 0,6W. On suppose que le transfert de chaleur est uniforme dans toute la résistance.

-Déterminez la quantité de chaleur dissipée par cette résistance en 24h. De même la densité de ce flux de chaleur.

Solution

-La quantité de chaleur dissipée par cette résistance en 24h est de:

$Q = \Phi.\Delta t = (0.6\ \mathrm{W})(24\ \mathrm{h}) = \mathbf{14.4\ Wh = 51.84\ kJ}$ avec (1Wh=3,6kJ).

-La densité du flux de chaleur est:

$(\ )\ \cancel{\mathbf{cm}}^{2}$

q =

0.28 w/cm²

II. Transfert de masse

Introduction

II.1 Équations de bilan pour un mélange

- ***a) Définitions des concentrations et des densités de flux de masse***
- ***b) Loi de diffusion de Fick pour un mélange***
- ***c) Coefficient de diffusion $\mathscr{D}_{AB}$***
- ***d) 2ème loi de Fick (diffusion + convection)***
- ***e) Équation de bilan de masse généralisée pour un mélange sans réactions chimiques***

II.2 Problème typique de diffusion de matière

- ***a) Diffusion équimolaire ou milieu immobile ($N_A+N_B = 0$)***
- ***b) Diffusion de A dans B stagnant (inerte) ($N_B = 0$)***

Introduction

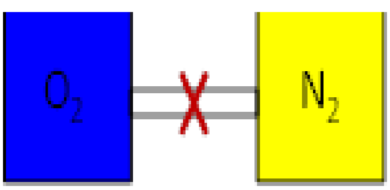
✓ Le transfert de matière (ou transfert de masse) joue un rôle très important dans les opérations unitaires de base mises en œuvre au cours de la **transformation des aliments ou de produits biologiques** (séchage, salage, sucrage, absorption, adsorption, cristallisation, extraction, distillation, ...).

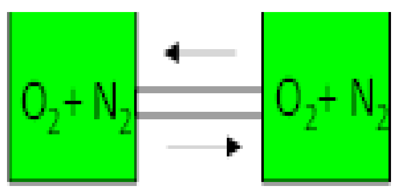
✓ Au cours de ces opérations, le transfert de matière est classiquement **le facteur limitant la vitesse du procédé**, même si le transfert de chaleur et le flux du produit peuvent aussi être en cause.

✓ Le transfert de matière a aussi un rôle très important **lors de l'emballage des produits** et de leur **entreposage** : transfert d'humidité, de gaz, de composés de saveur à travers le matériau d'emballage.

✓ Le transfert de matière consiste en la migration de composés à l'intérieur d'une phase ou entre des phases. Cette migration résulte d'un changement dans l'équilibre d'un système causé par une/des différences de potentiel(s) : différence de concentration d'une espèce d'un point à un autre, différence de température et/ou différence de pression.

✓ Toute différence de potentiel entraîne une évolution spontanée vers l'uniformité : une différence de concentration d'un composé entre deux points d'un système entraine donc un transfert de matière jusqu'à atteindre l'uniformité de concentration.





$t=0$ $t\to\infty$

Lorsqu'on s'intéresse au transfert de matière, on doit distinguer deux cas, selon que le transfert se fait au sein d'une phase ou entre deux phases partiellement ou totalement immiscibles. En outre, chacune des phases peut être mobile ou immobile

Le transfert de masse (ou de matière) → **Dans une phase (mobile ou non)**
→ **Entre phases (mobiles ou non)**

a) Phase immobile : Une phase immobile ne signifie pas qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble des molécules, mais au niveau de la phase, le transport se fait uniquement par **diffusion moléculaire**, et il n'existe pas dans la phase de tourbillons provoquant - avec une dégradation d'énergie mécanique et de quantité de mouvement - le brassage d'agrégats de fluide ayant des compositions différentes.

Diffusion

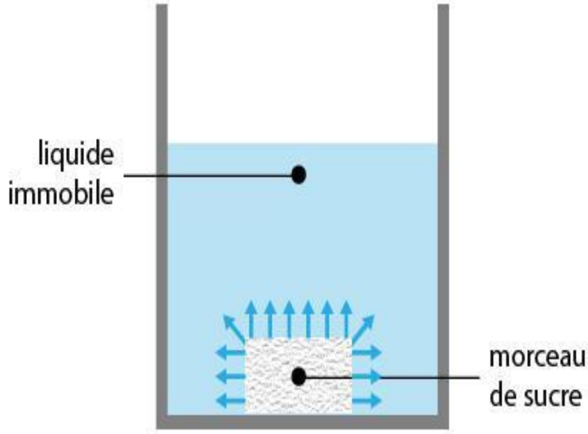
La diffusion est un processus lent : les molécules migrent dans un solide ou dans un fluide considéré Comme Immobile (écoulement laminaire).

Exemple : diffusion des molécules de sucre, dispersion par agitation moléculaire suivant des trajectoires aléatoires entre les molécules d'eau.

- ✓ un morceau de sucre dans un tasse de café. Celui-ci commence à fondre et se répand dans la tasse par diffusion

Les molécules de sucre plongées dans du café essayent de se frayer un chemin à travers les molécules de liquide.

La diffusion résulte d'une différence de concentration : quand le sucre fond, la concentration en sucre, qui était maximum au fond de la tasse et nulle à la surface, va changer plus ou moins rapidement, et tout le café sera finalement sucré.



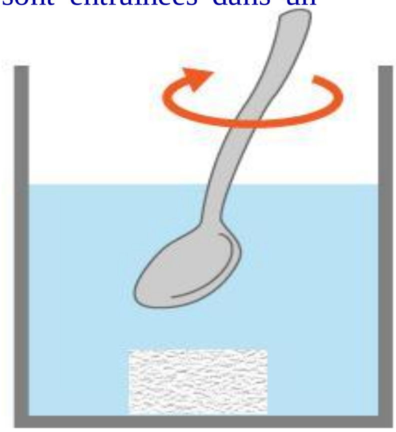
b) **Phase mobile :** Par opposition, dans le cas d'une phase mobile, le transport par diffusion des Constituants n'est pas dû uniquement à la **diffusion moléculaire** mais aussi à la **diffusion turbulente (Convection)**.

Diffusion moléculaire

Diffusion turbulente : tourbillons provoquant le brassage d'agrégats de fluides de différentes compositions.

Convection : La convection est un processus rapide : les molécules sont entraînées dans un courant de fluide naturel ou forcé (convection naturelle ou forcée).

Exemple : l'agitation avec une cuillère est une convection forcée.



II.1 Équations de bilan pour un mélange

a) Définitions des Quantité de matière , concentrations et des densités de flux de masse

Nous considérerons ici un mélange de gaz ou une solution (constituée d'un solvant et de un (constituant qu'on notera A) ou de plusieurs constituants ou encore une suspension de particules.
La concentration des divers constituants peut s'exprimer de différentes manières.

Massique	*Molaire*
Masse du constituant A : m_A (kg)	$Q^{té}$ de matière du constituant A : n_A (mol)
Concentration massique : ρ_A (kg/m^3)	Concentration molaire : c
❶ *Concentration*	❶ *Concentration*

Soit la concentration totale :

Masse de mélange

(II.1)

(II.3
)

Massique

❷ *Fraction*

$$\varpi_A = \frac{\rho_A}{\rho} = \frac{m_A}{\sum_i m_i} = \frac{m_A}{m} \qquad (II.4)$$

❸ *Vitesse massique moyenne de mélange en axes fixes (vitesse barycentrique massique)*

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum_i (\rho_i \vec{V}_i) \qquad (II.6)$$

Molaire

❷ *Fraction*

$$x_A = \frac{n_A}{n} = \frac{c_A}{c} \longrightarrow \sum_i x_i = 1 \qquad (II.5)$$

Par convention, x et y désignent respectivement les fractions molaires des phases liquides et gazeuses.

❸ *Vitesse molaire moyenne de mélange en axes fixes (vitesse barycentrique molaire)*

$$\vec{V}^* = \frac{1}{c} \sum_i (c_i \vec{V}_i) \qquad (II.7)$$

$\vec{V}_i$: Vitesse de l'espèce i. En effet, tout point de l'espace à l'instant considéré (variable eulérienne) peut être caractérisé par sa concentration locale ainsi que sa vitesse locale absolue, c'est-à-dire par rapport à un repère fixe.

❹ *Vitesse de diffusion*

C'est la vitesse de diffusion de A par rapport à la vitesse de mélange

(II.8.1)

❹ *Vitesse de diffusion*

$$V'_A = V_A - V^* \qquad (II.8.2)$$

Massique

❺ Taux de transfert de matière

Correspond à la quantité de matière transférée par unité de temps.

$$q_A = \frac{m_A}{t} \quad (kg / s) \qquad (II.9)$$

❻ Densité de flux

$$n_A = \rho_A V_A \qquad (II.11.1)$$

❼ Densité de flux massique de diffusion

$$J_A = \rho_A V_A' \qquad (II.12.1)$$

Molaire

❺ Taux de transfert de matière

$$q_A^* = \frac{n_A}{t} \quad (mol / s) \qquad (II.10)$$

❻ Densité de flux

$$N_A = c_A V_A \qquad (II.11.2)$$

❼ Densité de flux molaire de diffusion

$$J_A^* = c_A V_A^{*\prime} \qquad (II.12.2)$$

Relations entre flux

$$\sum_i \vec{J}_i = \sum_i \vec{J}^*_i = 0 \qquad \text{(II.13)}$$

$$\vec{N}_A = c_A \vec{V}_A = c_A\left(\vec{V}_A^{*\prime} + \vec{V}^*\right) \qquad \text{(II.15)}$$

$$\vec{n}_A = \underbrace{\vec{J}_A}_{(1)} + \underbrace{\varpi_A \sum_i \vec{n}_i}_{(2)} \qquad \text{(II.14)}$$

$$\vec{N}_A = \underbrace{\vec{J}^*_A}_{(1)} + \underbrace{x_A \sum_i \vec{N}_i}_{(2)} \qquad \text{(II.16)}$$

(1) : Densité de flux de diffusion. (2) : Densité de flux de convection ou de transport.

Intro. 01 :

1. Pour un mélange binaire de A et B, montrer que la fraction massique ω_A est reliée à la fraction molaire x_A (et inversement) par :

$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$$

Et

$$x_A = \frac{\frac{\omega_A}{M_A}}{\left(\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B}\right)}$$

1. La composition de l'air atmosphérique en pourcentage massique est de 79,04 % d'azote (N2), de 20,93 % d'oxygéné (O2) et de 0,03 % de dioxyde de carbone (CO2).

Déterminer les fractions molaires et les pressions partielles.

Corrigé Intro. 01 :

1. Pour un mélange binaire de A et B, montrer que la fraction massique ω_A est reliée à la fraction molaire x_A (et inversement) par :

$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$$

Et

$$x_A = \frac{\frac{\omega_A}{M_A}}{\left(\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B}\right)}$$

$$\omega_A = \frac{m_A}{\sum m_i} = \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

avec

$$m_i = n_i M_i$$

$$n_t = n_A + n_B$$

En remplaçant

$$\omega_A = \frac{n_A M_A}{n_A M_A + n_B M_B} * \boxed{\frac{n_t}{n_t}} \longrightarrow \boxed{\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}} \quad (*)$$

Corrigé Intro. 01 :

$$x_A = \frac{n_A}{\sum n_i} = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

avec

$$n_i = m_i \,/\, M_i$$

$$m_t = m_A + m_B$$

En remplaçant

$$x_A = \frac{m_A / M_A}{m_A / M_A + m_B / M_B} * \boxed{\frac{m_t}{m_t}}$$

$$\longrightarrow \boxed{x_A = \frac{\omega_A / M_A}{\omega_A / M_A + \omega_B / M_B}} \qquad (**)$$

Corrigé Intro. 01 :

1. La composition de l'air atmosphérique en pourcentage massique est de 79,04 % d'azote (N_2) (A), de 20,93 % d'oxygéné (O_2) (B) et de 0,03 % de dioxyde de carbone (CO_2) (C). Déterminer les fractions molaires et les pressions partielles.

En remplaçant dans l'équation (**)

$$x_i = \frac{\omega_i / M_i}{\sum_i \omega_i / M_i}$$

$$x_A = \frac{\omega_A / M_A}{\omega_A / M_A + \omega_B / M_B + \omega_C / M_C}$$

$$X_A = \frac{0{,}7904 / 28}{0{,}7904 / 28 + 0{,}2093 / 32 + 0{,}0003 / 44} = 0{,}811 = 81{,}10\%$$

$$X_B = \frac{0{,}2093 / 32}{0{,}7904 / 28 + 0{,}2093 / 32 + 0{,}0003 / 44} = 0{,}1881 = 18{,}81\%$$

$$X_C = \frac{0{,}0003 / 44}{0{,}7904 / 28 + 0{,}2093 / 32 + 0{,}0003 / 44} = 0{,}0001 = 0{,}01\%$$

Intro. 02 :

L'analyse d'un gaz naturel a donné les résultats suivants (en mole) : 4% de dioxyde de carbone (CO_2), 14 % d'azote (N_2) ,), 5 % d'éthane (C_2H_6) et 77% de méthane (CH_4).

Déterminer la fraction massique d'azote, et la masse molaire moyenne du mélange.

Intro. 03 :

Soit un mélange binaire composé de A et B en mouvement tel que :

$x_A = 1/6$; $V^* = 12$ cm/s ; $V_A - V^* = 3$ cm/s ; $M_A = 5M_B$ Calculer,

$$V_B \; ; \; V_B - V^* \; ; \; V \; ; \; V_A - V \; ; \; V_B - V$$

Corrigé Intro. 02 :

L'analyse d'un gaz naturel a donné les résultats suivants (en mole) : 4% de dioxyde de carbone (CO_2) (A), 14 % d'azote (N_2) , (B), 5 % d'éthane (C_2H_6) (C) et 77% de méthane (CH_4) (D).

Déterminer la fraction massique d'azote, et la masse molaire moyenne du mélange.

D'après l'INTO 01, en remplaçant dans l'équation (*)

$$\omega_i = \frac{x_i M_i}{\sum_i x_i M_i} \quad ; \quad \omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B + x_C M_C + x_D M_D}$$

$$X_A = \frac{0{,}04 / 44}{0{,}04/44 + 0{,}14/28 + 0{,}05/30 + 0{,}77/16} = 0{,}016 = 1{,}6\%$$

$$X_B = \frac{0{,}14 / 28}{0{,}04/44 + 0{,}14/28 + 0{,}05/30 + 0{,}77/16} = 0{,}0897 = 8{,}97\%$$

$$X_C = \frac{0{,}05 / 30}{0{,}04/44 + 0{,}14/28 + 0{,}05/30 + 0{,}77/16} = 0{,}0299 = 2{,}99\%$$

$$X_D = \frac{0{,}77 / 16}{0{,}04/44 + 0{,}14/28 + 0{,}05/30 + 0{,}77/16} = 0{,}8644 = 86{,}44\%$$

Corrigé Intro. 03 :

Soit un mélange binaire composé de A et B en mouvement tel que :

$x_A = 1/6$; $V^* = 12$ cm/s ; $V_A - V^* = 3$ cm/s ; $M_A = 5M_B$

Calculer, V_B ; $V_B - V^*$; V ; $V_A - V$; $V_B - V$

➤ Vitesse absolu de B, V_B

Vitesse molaire moyenne de mélange en axes fixes (vitesse barycentrique molaire) V*

$$V^* = \frac{1}{c}\sum_i (c_i V_i) \Rightarrow V^* = \sum_i \frac{(c_i V_i)}{C} = \frac{c_A V_A + c_B V_B}{C}$$

$$V^* = x_A V_A + x_B V_B \Rightarrow V_B = \frac{(V^* - x_A V_A)}{x_B}$$

$$V_B = \frac{(12 - (1/6)*15)}{1 - (1/6)} = 11{,}4 \text{ cm/s}$$

Corrigé Intro. 03 :

Soit un mélange binaire composé de A et B en mouvement tel que :

$x_A = 1/6$; $V^* = 12$ cm/s ; $V_A - V^* = 3$ cm/s ; $M_A = 5M_B$

Calculer, V_B ; $V_B - V^*$; V ; $V_A - V$; $V_B - V$

- Vitesse molaire de diffusion de B: $V_B^{*'} = V_B - V^*$

$$V_B^{*'} = V_B - V^* = 11{,}4 - 12 = -0{,}6 \text{ cm/s}$$

- Vitesse massique moyenne de mélange V :

$$V = \frac{1}{\rho}\sum_i(\rho_i V_i) = \sum_i \frac{(\rho_i V_i)}{\rho} = \sum \omega_i V_i = \omega_A V_A + \omega_B V_B$$

$$\omega_i = \frac{x_i M_i}{\sum_i x_i M_i}$$

$$V = \frac{x_A M_A V_A + x_B M_B V_B}{x_A M_A + x_B M_B}$$

Corrigé Intro. 03 :

Soit un mélange binaire composé de A et B en mouvement tel que :

$x_A = 1/6$; $V^* = 12$ cm/s ; $V_A - V^* = 3$ cm/s ; $M_A = 5M_B$

Calculer, V_B ; $V_B - V^*$; V ; $V_A - V$; $V_B - V$

- Vitesse massique moyenne de mélange V :

$$V = \frac{x_A M_A V_A + x_B M_B V_B}{x_A M_A + x_B M_B}$$

$$V = \frac{5 x_A M_B V_A + x_B M_B V_B}{5 x_A M_B + x_B M_B}$$

$$V = \frac{5(1/6) V_A + (5/6) V_B}{5(1/6) + (5/6)} = \frac{V_A + V_B}{1+1} = \frac{15 + 11{,}4}{2} = 13{,}2 \text{ cm/s}$$

- Vitesse massique de diffusion de A: $V_A' = V_A - V$

$$V'_A = V_A - V = 15{,}-13{,}2 = 1{,}8 \text{ cm/s}$$

- Vitesse massique de diffusion de B: $V_B' = V_B - V$

$$V'_B = V_B - V = 11{,}4 - 13{,}2 = -1{,}8 \text{ cm/s}$$

Intro. 04 :

Un mélange gazeux s'écoule dans une conduite; il a la composition molaire suivante :

CO : 5 % ; CO_2 : 7 % ; O_2 : 8 % ; N_2 : 80 %

Si les vitesses individuelles des constituants sont :

V_{CO} = 5,5 m/s ; V_{CO2} = 3 m/s ; V_{O2} = 5 m/s ; V_{N2} = 16 m/s

Trouver:

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)
2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé
3. la masse volumique du mélange ρ.

Le gaz est à 295 K et sous 1,013.105 Pa.

Corrigé Intro. 04 :

Un mélange gazeux s'écoule dans une conduite; il a la composition molaire suivante :
CO (A) : 5 % ; CO_2 (B): 7 % ; O_2 (C) : 8 % ; N_2 (D) : 80 %.
Si les vitesses individuelles des constituants sont :
V_A = 5,5 m/s ; V_B = 3 m/s ; V_C = 5 m/s ; V_D = 16 m/s
Trouver:

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)
2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé
3. la masse volumique du mélange ρ.

Le gaz est à 295 K et sous 1,013.105 Pa.

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)

$$V^* = \frac{1}{c}\sum_i (c_i V_i)$$

$$V^* = \sum_i \frac{(c_i V_i)}{C} = \sum_i x_i V_i$$

$$V = \frac{1}{\rho}\sum_i (\rho_i V_i) = \sum_i \frac{(\rho_i V_i)}{\rho} = \sum_i \omega_i V_i = \frac{\sum_i x_i M_i V_i}{\sum_i x_i M_i} = \frac{\sum_i x_i M_i V_i}{\overline{M}}$$

$$V^* = x_A V_A + x_B V_B + x_C V_C + x_D V_D$$

$$= \frac{5 * 5,5 + 7 * 3 + 8 * 5 + 80 * 16}{100}$$

$$= 13,685 \text{ m / s}$$

Un mélange gazeux s'écoule dans une conduite; il a la composition molaire suivante :
CO (A) : 5 % ; CO_2 (B): 7 % ; O_2 (C) : 8 % ; N_2 (D) : 80 %.
Si les vitesses individuelles des constituants sont :
V_A = 5,5 m/s ; V_B = 3 m/s ; V_C = 5 m/s ; V_D = 16 m/s
Trouver:

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)
2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé
3. la masse volumique du mélange ρ.

Le gaz est à 295 K et sous 1,013.105 Pa.

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)

$$V = \frac{\sum_i x_i M_i V_i}{\overline{M}} = \frac{x_A M_A V_A + x_B M_B V_B + x_C M_C V_C + x_D M_D V_D}{x_A M_A + x_B M_B + x_C M_C + x_D M_D}$$

$$V = \frac{5 * 5{,}5 * 28 + 7 * 3 * 44 + 8 * 5 * 32 + 80 * 16 * 28}{5 * 28 + 7 * 44 + 8 * 32 + 80 * 28} = 13{,}18 \text{ m / s}$$

Intro. 04 :

Un mélange gazeux s'écoule dans une conduite; il a la composition molaire suivante :

CO (A) : 5 % ; CO_2 (B): 7 % ; O_2 (C) : 8 % ; N_2 (D) : 80 %.

Si les vitesses individuelles des constituants sont :

V_A = 5,5 m/s ; V_B = 3 m/s ; V_C = 5 m/s ; V_D = 16 m/s

Trouver:

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)
2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé
3. la masse volumique du mélange ρ.

Le gaz est à 295 K et sous 1,013.105 Pa.

2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé (V_i^*’ et V_i’)

$$V_i^{*'} = V_i - V^* \Rightarrow \begin{cases} V_A^{*'} = V_A - V^* = 5,5 - 13,685 = -8,185 \, m/s \\ V_A^{*'} = V_A - V^* = 3 - 13,685 = -10,685 \, m/s \\ V_A^{*'} = V_A - V^* = 5 - 13,685 = -8,685 \, m/s \\ V_A^{*'} = V_A - V^* = 16 - 13,685 = 2,315 \, m/s \end{cases}$$

$$V_i' = V_i - V \Rightarrow \begin{cases} V_A' = V_A - V = 5,5 - 13,18 = -7,68 \, m/s \\ V_A' = V_A - V = 3 - 13,18 = -10,18 \, m/s \\ V_A' = V_A - V = 5 - 13,18 = -8,18 \, m/s \\ V_A' = V_A - V = 16 - 13,18 = 2,82 \, m/s \end{cases}$$

b) Loi de diffusion de Fick pour un mélange

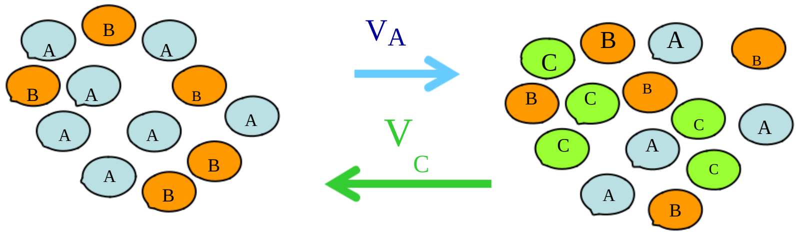


Figure II.1 : Schématisation de la diffusion moléculaire.

La diffusion moléculaire est un mouvement spontané des molécules (atomes ou ions) des régions ou leur concentration est élevée vers les zones où celle-ci est plus faible, voire nulle.

Sous l'influence de la différence de concentration (force motrice), le transfert de masse s'effectue jusqu'au moment où les concentrations (des espèces A, B et C) redeviennent homogènes, c'est-à-dire égales dans les deux régions. Le transfert cesse alors.

La 1ère loi de Fick pour le calcul d'un flux diffusif assume que la diffusion de matière résulte uniquement d'un gradient de concentration. En réalité, la diffusion peut aussi résulter d'un gradient de température, de pression ou d'une force externe. Cependant, dans la plupart des cas, ces effets sont négligeables et la force motrice dominante est le gradient de concentration.

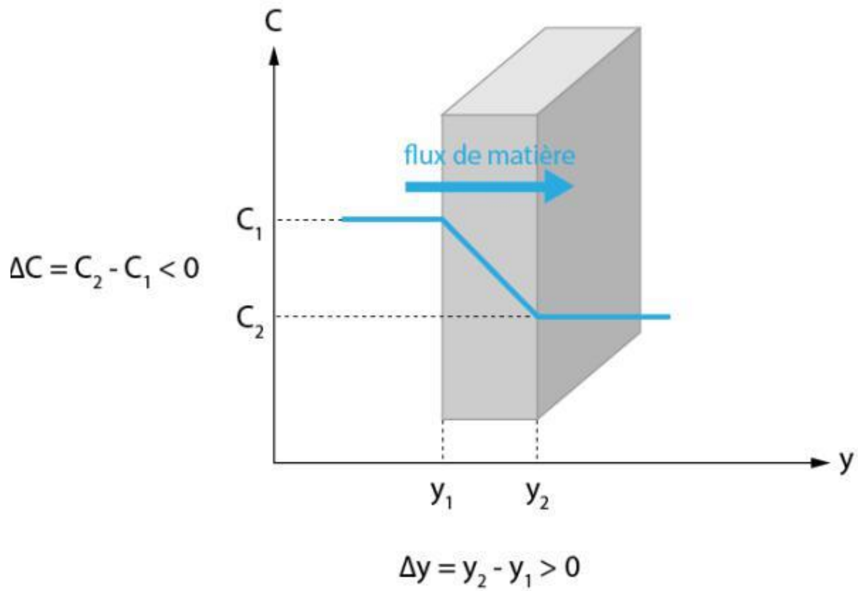
b) Loi de diffusion de Fick pour un mélange

L'équation de Fick est alors la loi qui régit la diffusion moléculaire lorsqu'elle est provoquée uniquement par un gradient de concentration.

Formule générale - écriture vectorielle (flux suivant les 3 directions de l'espace) :

$$J_A = \rho_A V_A' = -\rho \mathcal{D}_{AM} \, \mathrm{grad}\,(\varpi_A) \qquad \text{(II.17.1)}$$

$$J_A^* = c_A V_A^{*'} = -c \mathcal{D}_{AM} \, \mathrm{grad}\,(x_A) \qquad \text{(II.17.2)}$$



Si c et ρ sont constantes :

$$\overrightarrow{J}_A = -\mathcal{D}_{AM} \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\rho_A) \qquad \text{(II.18.1)}$$

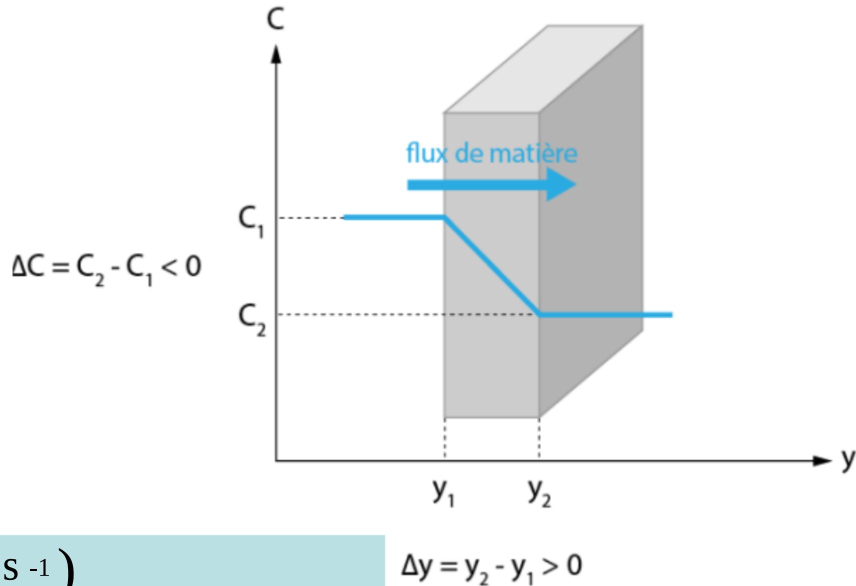
$$\overrightarrow{J}_A^* = -\mathcal{D}_{AM} \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(c_A) \qquad \text{(II.18.2)}$$

b) Loi de diffusion de Fick pour un mélange

Formule pour un flux unidirectionnel (ici suivant l'axe y) :

$$J_A = -\mathcal{D}_{AM}\frac{d\rho_A}{dy} = -\mathcal{D}_{AM}\frac{\Delta\rho_A}{\Delta y} \quad \text{(II.19.1)}$$

$$J_A^* = -\mathcal{D}_{AM}\frac{dc_A}{dy} = -\mathcal{D}_{AM}\frac{\Delta c_A}{\Delta y} \quad \text{(II.19.2)}$$



- J_A ou J_A^* : flux de diffusion du A ($kg.m^{-2}.s^{-1}$ ou $mol.m^{-2}.s^{-1}$)
- $\mathcal{D}_{AM}$: coefficient de diffusion (ou diffusivité) du A dans le mélange M ($m^2 s^{-1}$)
- ρ_A ou c_A : concentration en A ($kg.m^{-3}$ ou $mol.m^{-3}$)
- $\Delta\rho_A$ ou Δc_A : variation de concentration en A ($kg.m^{-3}$ ou $mol.m^{-3}$)

c) Coefficient de diffusion $\mathscr{D}_{\mathbf{AB}}$

- Le coefficient de diffusion est défini pour un composé dans un milieu : $\mathscr{D}_{AM}$ est le coefficient de diffusion du composé A dans le milieu M.
- Il dépend de la pression et de la température.
- Les coefficients de diffusion peuvent être trouvés dans la littérature ou calculés à l'aide de corrélations.

Valeurs typiques de $\mathscr{D}_{\mathbf{AB}}$

A et B gaz : 20°C : $\mathscr{D}_{\mathbf{AB}}$= 1 à 2 x 10^{-5} m^2/s ; (valeurs plus élevées si A ou B = H_2)

A et B liquides : 20°C : $\mathscr{D}_{\mathbf{AB}}$ = 0,2 à 2 x 10^{-9} m^2/s

Gaz dans solide : 20°C : $\mathscr{D}_{\mathbf{AB}}$ = 10^{-12} à 10^{-14} m^2/s augmente beaucoup avec T

Solide dans solide : 20°C : $\mathscr{D}_{\mathbf{AB}}$ = 10^{-34} à 10^{-19} m2/s augmente beaucoup avec T

d) 2ème loi de Fick (Diffusion + Convection)

La 2ème loi de Fick prend en compte le transport par le mouvement moyen du fluide.

Massique	*Molaire*
$n_A = \underbrace{J_A}_{(1)} + \underbrace{T_A}_{(2)}$	$\vec{N}_A = \underbrace{\vec{J}^*_A}_{(1)} + \underbrace{\vec{T}^*_A}_{(2)}$
$n_A = \underbrace{J_A}_{(1)} + \underbrace{\varpi_A \sum_i n_i}_{(2)}$ (II.20.1)	$\vec{N}_A = \underbrace{\vec{J}^*_A}_{(1)} + \underbrace{x_A \sum_i \vec{N}_i}_{(2)}$ (II.20.2)

$$J^*_A = -\mathcal{D}_{AM} \frac{\Delta c_A}{\Delta y} \qquad (= c_A V^{*\prime}_A) \qquad \text{(II.20.3)}$$

$$T^*_A = c_A V^*$$

- n_A ou N_A : densité de flux global du composé A ($kg.m^{-2}.s^{-1}$ ou $mol.m^{-2}.s^{-1}$)
- J_A ou J^*_A : densité de flux de diffusion du A ($kg.m^{-2}.s^{-1}$ ou $mol.m^{-2}.s^{-1}$)
- T_A ou T^*_A : densité de flux par transport convectif du composé A ($kg.m^{-2}.s^{-1}$)
- ρ_A ou c_A : concentration en A ($kg.m^{-3}$ ou $mol.m^{-3}$)

ou $mol.m^{-2}.s^{-1}$)

e) Équation de bilan de masse généralisée pour un mélange avec réactions chimiques

Objectif est, obtenir une équation décrivant l'évolution de la concentration d'un composé dans l'espace et avec le temps (trouver le profile de concentration??).

Pour chaque constituant du mélange, on peut écrire pour l'espèce A du mélange l'équation de conservation de la masse (invariance de la masse).

Méthode : Faire un bilan de matière sur un élément de volume microscopique

$$dv = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \qquad \text{(II.21)}$$

$[\text{Entrée - Sortie}]_{\text{par les 3 faces}} \pm \text{Réaction} + \text{Accumulation} = 0$

e) Équation de bilan de masse généralisée pour un mélange avec réactions chimiques

$$\operatorname{div}\left(N_A\right) \cancel{\pm r_A} + \cancel{\frac{\partial c_A}{\partial t}} = 0 \quad \text{(II.22.1)} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\left(N_A\right) = 0 \quad \text{(II.22.2)}$$

Pas de réaction chimique

Transfert moléculaire stationnaire.

$$\frac{\partial N_{Ax}}{} + \frac{\partial N_{Ay}}{} + \frac{\partial N_{Az}}{} = 0$$

(II.23) ***Équation de bilan générale***

II.2 Problème typique de diffusion de matière

Objectif : Détermination du profil de concentration dans un milieu binaire AB

Forme générale de l'équation (II.23) aux dérivées partielles de bilan (cas molaire), pour un systèmes non réactifs et un Transfert moléculaire stationnaire

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0 \qquad \textit{(II.23)}$$

Deux cas extrêmes importants

a) Diffusion équimolaire ou milieu immobile ($N_A+N_B = 0$)

b) Diffusion de A dans B stagnant (inerte) ($N_B = 0$)

Diffusion stationnaire

Hypothèses :

❶ Transfert moléculaire stationnaire.

❷ E^{ct}. unidirectionnel + unidimensionnel.

❸ $\left.\begin{array}{l} p = cte \\ T = cte \end{array}\right\}$ $c = cte$

❹ $\mathscr{D}_{AB} = Cte.$

❺ Systèmes non réactifs (Pas de réaction chimique)

❶ $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

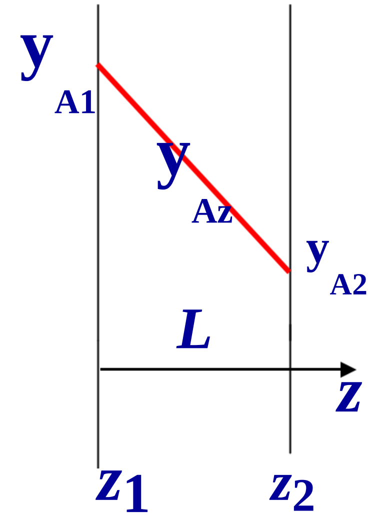
❷ $N_A = \begin{cases} N_{Ax} \equiv 0 \\ N_{Ay} \equiv 0 \\ N_{Az} = N_{Az}(z) \end{cases}$

II. Transfert de masse

a) *Diffusion équimolaire ou milieu immobile ($N_A+N_B = 0$)*

$$\left.\begin{array}{l} p = cte \\ \\ T = cte \end{array}\right\} c = cte$$

Le nb. tot. de moles se conserve : $n_A + n_B = Cte$ → $N_{Az} = -N_{Bz}$



z_2-z_1 = L

Procédure de Résolution

d'après l'équation (II.20)

$$\vec{N}_A = \underbrace{\vec{J}^*_A}_{(1)} + \underbrace{x_A \sum_i \vec{N}_i}_{(2)} \qquad \vec{N}_A = \underbrace{\vec{J}^*_A}_{(1)} + \underbrace{y_A \sum_i \vec{N}_i}_{(2)}$$

$$N_{Az}(z) = \underbrace{-c\mathcal{D}_{AB}\frac{dy_A(z)}{dz}}_{J_A^*} + \underbrace{y_A(z)\left(\cancel{N_{Az}(z) - N_{Az}(z)}\right)}_{T_A^*} \xrightarrow{} 0$$

$$\int_{z_1}^{z_2} N_{Az}\, dz = -c\,\mathcal{D}_{AB}\int_{y_{A1}}^{y_{A2}} dy_A$$

??

$$\cancel{\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial N_{Ay}}{\partial y}} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0$$

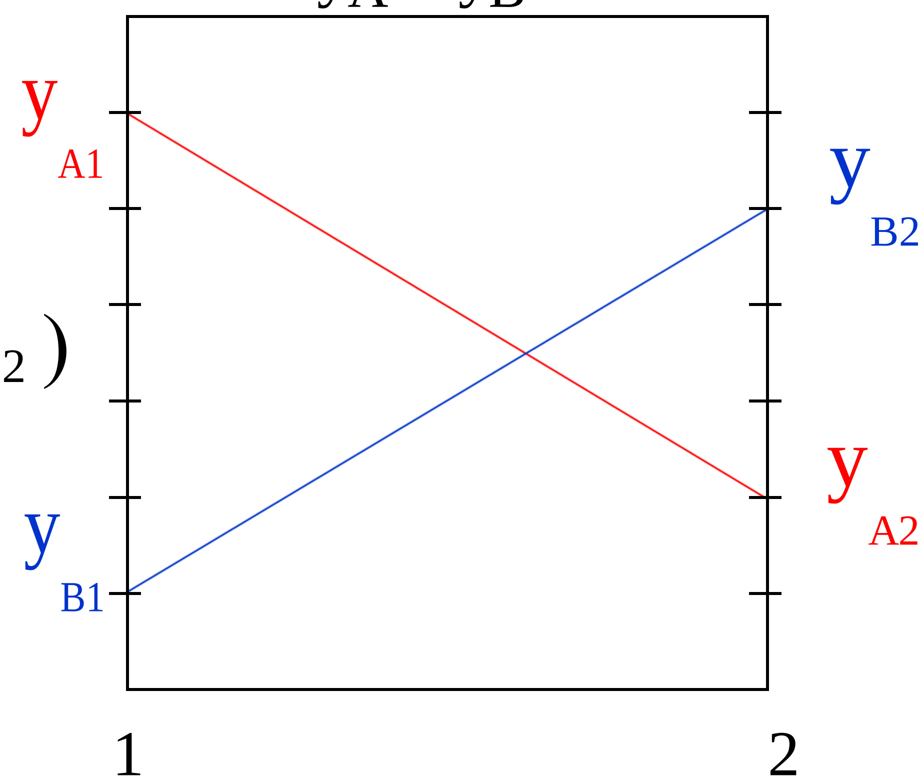
$N_{Az} = Cte$

$$N_{Az} = J_{Az}^{*} = \frac{c\,\mathcal{D}_{AB}}{L}\left(y_{A1} - y_{A2}\right)$$

$$N_{Az} = J_{Az}^{*} = \frac{c\,\mathcal{D}_{AB}}{z}\left(y_{Az} - y_{A2}\right)$$

$$C = \frac{P}{RT}$$

$$y_A + y_B = 1$$



Profils de concentration

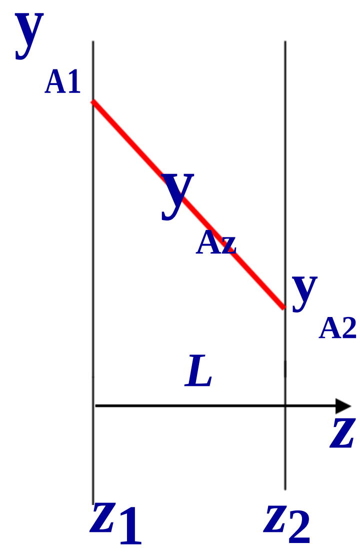
$$\frac{c\,\mathcal{D}_{AB}}{L}\left(y_{A1} - y_{A2}\right) = \frac{c\,\mathcal{D}_{AB}}{z}\left(y_{Az} - y_{A2}\right)$$

$$y_{Az} = \frac{z}{L}\left(y_{A1} - y_{A2}\right) + y_{A2}$$

II. Transfert de masse

b) Diffusion de A dans B stagnant (inerte) ($N_B = 0$)

$$\left.\begin{array}{l} p = cte \\ T = cte \end{array}\right\} c = cte$$



$z_2 - z_1 = L$

Procédure de Résolution

d'après l'équation (II.20)

$$N_A = \underbrace{J^*_A}_{(1)} + \underbrace{x_A \sum_i N_i}_{(2)} = \underbrace{J^*_A}_{(1)} + \underbrace{y_A \sum_i N_i}_{(2)}$$

$$N_{Az}(z) = \underbrace{-c\,\mathcal{D}_{AB}\frac{dy_A(z)}{dz}}_{J_A^*} + \underbrace{y_A(z)\left(N_{Az}(z) + \overset{0}{N_{Bz}}(z)\right)}_{T_A^*}$$

Or, d'après l'équation de bilan, on a:

$$\cancel{\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial N_{Ay}}{\partial y}} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0$$

$$N_{Az} = Cte$$

$$N_{Az}\int_{z_1}^{z_2} dz = -c\,\mathcal{D}_{AB}\int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{(1 - y_{A1})}$$

??

$$N_{Az} = \frac{c\,\mathscr{D}_{AB}}{L} \ln\left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}}\right)$$

$$N_{Az} = \frac{c\,\mathscr{D}_{AB}}{z} \ln\left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{Az}}\right)$$

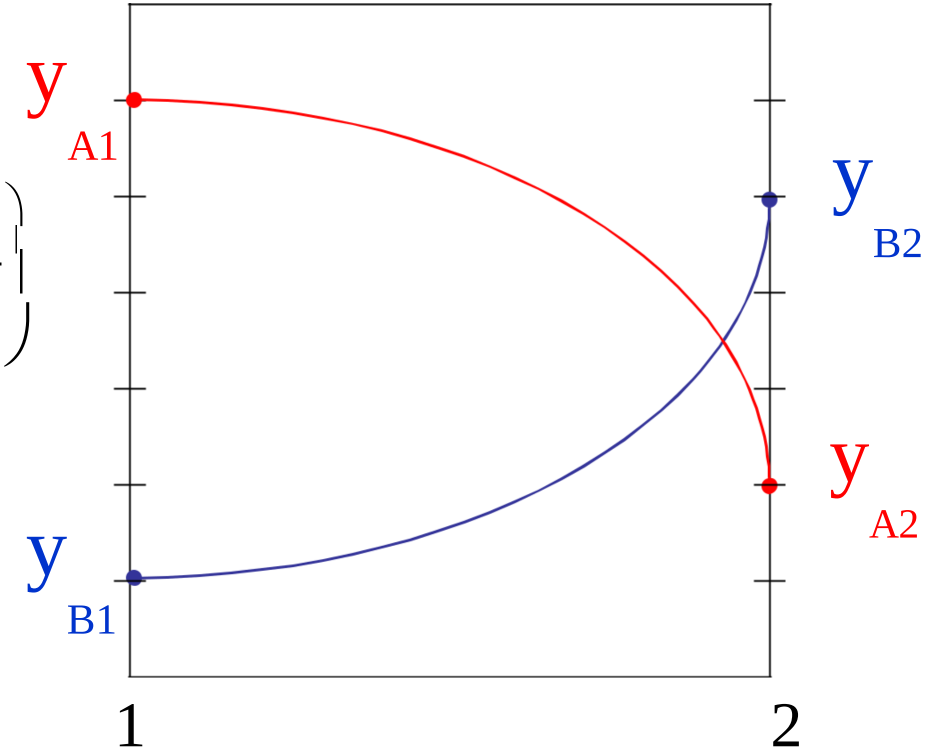
$$C = \frac{P}{RT}$$

$$y_A + y_B = 1$$

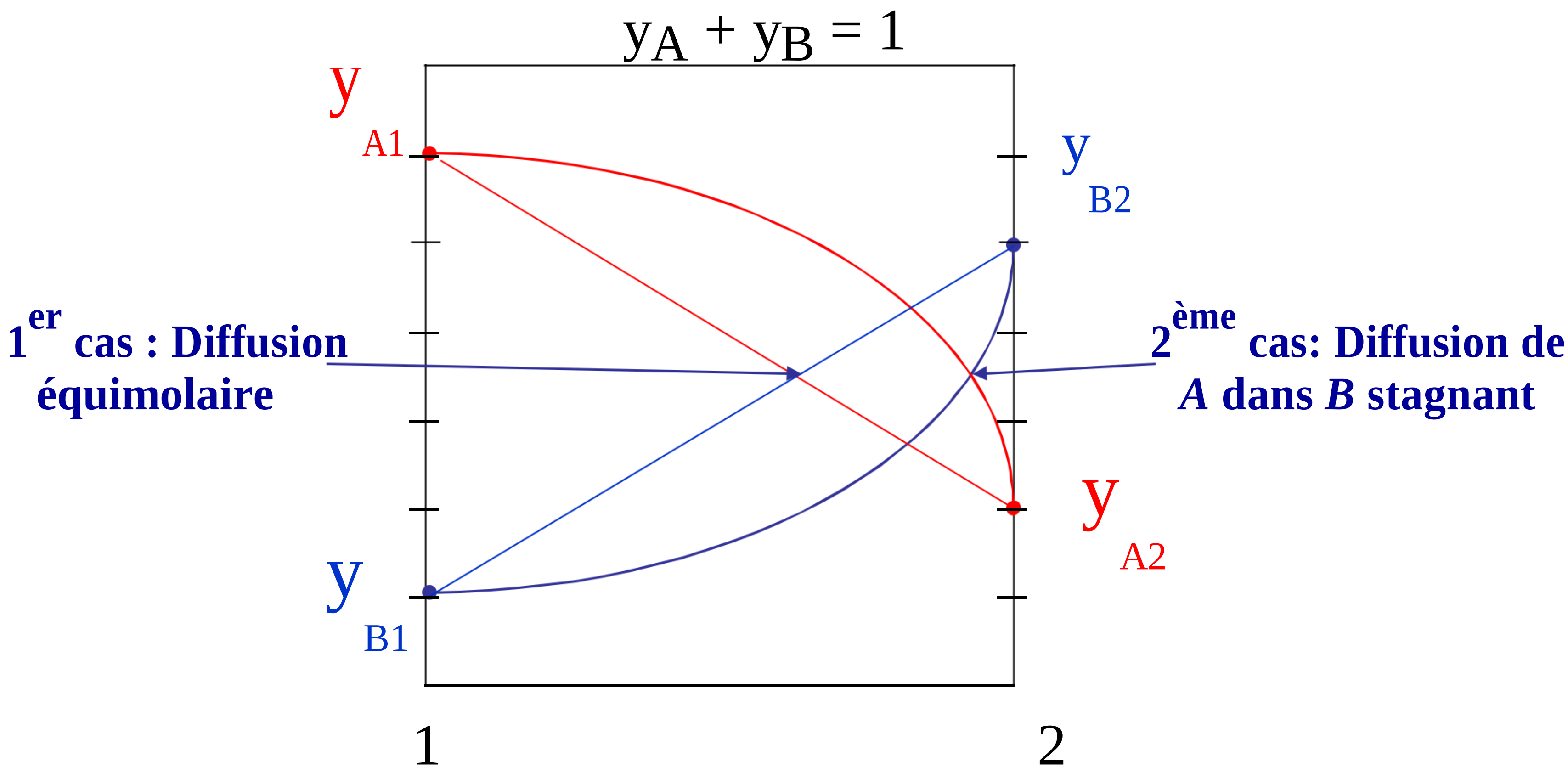
Profils de concentration

$$\frac{c\,\mathscr{D}_{AB}}{L} \ln\left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}}\right) = \frac{c\,\mathscr{D}_{AB}}{z} \ln\left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{Az}}\right)$$

$$y_{Az} = 1 - (1 - y_{A2})\left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}}\right)^{\left(-\frac{z}{L}\right)}$$



Comparaison des deux cas extrêmes en géométrie plane à une dimension et conditions aux limites constantes



Le transfert de matière :1er cas : est plus rapide 2ème cas

Considérons un transfert de matière unidirectionnelle et unidimensionnelle, s'effectuant en régime stationnaire entre deux plans parallèles distants de 0,50 cm, d'un mélange gaz comportant deux constituants : l'oxygène (A) et l'azote (B). La diffusion a lieu à pression atmosphérique et à une température constante égale à 25°C.

Les concentrations en oxygène sur la surface des deux plans parallèles sont 70% et 30% en volume, respectivement.

On considère que **l'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans**.

1. Calculer la densité de flux de transfert de l'oxygène (en mole/cm^2 s).
2. Déterminer la concentration en oxygène entre les deux plans aux positions suivantes : 0 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 cm.
3. Calculer les densités de flux d'oxygène dues au transport et à la diffusion entre ces plans à ces positions.
4. Quelles sont les vitesses absolues locale, moyenne et de diffusion de l'oxygène à ces positions ?

Données : Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'azote est de 0,204 cm^2/s.

M_{O2} = 32 g/mole M_{N2} = 28 g/mole

Correction

Hypothèses :

❶ Transfert moléculaire stationnaire.

❶ $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

❷ E^{ct}. unidirectionnel + unidimensionnel.

❷ $N_A = \begin{cases} N_{Ax} \equiv 0 \\ N_{Ay} \equiv 0 \\ N_{Az} = N_{Az}(z) \end{cases}$

❸ $\left.\begin{matrix} p = cte \\ T = cte \end{matrix}\right\}$ $c = cte$

❹ $\mathscr{D}_{AB}$ = Cte.

❺ Systèmes non réactifs (Pas de réaction chimique)

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

1. Calculer la densité de flux de transfert de l'oxygène N_{Az} (en mole/cm^2 s).

$$N_{Az} = J^*_{Az} + T^*_{Az} = J^*_{Az} + y_A \sum_i N_{iz}$$

$$N_{Az}(z) = \underbrace{-c\,\mathcal{D}_{AB}\frac{dy_A(z)}{dz}}_{J_A^*} + \underbrace{y_A(z)\left(N_{Az}(z)+\dots\right)}_{T_A}$$

Or, d'après l'équation de bilan, on a:

$$\cancel{\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial N_{Ay}}{\partial y}} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0$$

$$N_{Az}\int_{z_1}^{z_2} dz = -c\,\mathcal{D}_{AB}\int_{y_{A1}}^{y_{A2}}\frac{dy_A}{(1-y_A)}$$

??

$$N_{Az} = \frac{c\,\mathcal{D}_{AB}}{L}\ln\frac{(1-y_{A2})}{(1-y_{A1})} \quad \textbf{(1)}$$

N_{Az} = Cte

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

1. Calculer la densité de flux de transfert de l'oxygène N_{Az} (en mole/cm^2 s).

$$N_{Az} = \frac{c\,\mathscr{D}_{AB}}{L} \ln \frac{(1 - y_{A2})}{(1 - y_{A1})} \qquad \textbf{(1)}$$

AN

$$C = \frac{P}{R\,T} = \frac{1}{0,082\ 298} = 0,041 \text{ mol / l} = 41 \text{mol / m}^3$$

$$N_{Az} = \frac{41\,0,204\,10^{-4}}{0,5\,10^{-2}} \ln \frac{(1 - 0,3)}{(1 - 0,7)}$$

$$N_{Az} = 0,141 \text{ mol / m}^2\text{s} = 0,141\,10^{-4} \text{ mol / cm}^2\text{s}$$

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

2. Déterminer la concentration en oxygène entre les deux plans aux positions suivantes : 0 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 cm.

$$N_{Az} \int_{z_1}^{z} dz = -c\,\mathfrak{D}_{AB} \int_{y_{A1}}^{y_{A(z)}} \frac{dy_A}{(1-y_A)}$$

??

$$N_{Az} = \frac{c\,\mathfrak{D}_{AB}}{Z} \ln \frac{(1-y_A(z))}{(1-y_{A1})} \quad (2)$$

$$N_{Az} = \frac{c\,\mathfrak{D}_{AB}}{L} \ln \frac{(1-y_{A2})}{(1-y_{A1})} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_A(z) = 1-(1-y_{A1})\left(\dfrac{1-y_{A2}}{1-y_{A1}}\right)^{\frac{Z}{L}} \\ y_A(z) = 1-0{,}3(2{,}33)^{2.Z} \end{cases}$$

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

2. Déterminer la concentration en oxygène entre les deux plans aux positions suivantes : 0 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 cm.

$$y_A(z) = 1 - 0{,}3(2{,}33)^{2.Z}$$

Z (cm)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$y_A(z)$	0,700	0,645	0,579	0,502	0,410	0,300

$$N_{Az} = 0{,}141 \text{ mol / m}^2\text{s}$$

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

3. Calculer les densités de flux d'oxygène dues au transport et à la diffusion entre ces plans à ces positions.

$$N_{Az}(z) = -c\,\mathcal{D}_{AB}\frac{dy_A(z)}{dz} + y_A(z)\left(N_{Az} + \right.$$

$$J_A^*$$

$$T_A^* = y_A(z)\,N_{Az} \qquad J_A^* = -c\,\mathcal{D}_{AB}\frac{dy_A(z)}{dz} = N_{Az}\left(1 - y_A(z)\right)$$

Z (cm)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$y_A(z)$	0,700	0,645	0,579	0,502	0,410	0,300
$T^*_A(z)$ (mol/m^2 S)	0,0987	0,0909	0,0817	0,0708	0,0578	0,0425
$J^*_A(z)$ (mol/m^2 S)	0,042	0,050	0,059	0,070	0,083	0,098

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

4. Quelles sont les vitesses absolues locale, moyenne et de diffusion de l'oxygène à ces positions ?

a) vitesses absolues V_A

$$N_A = c_A V_A = C\, y_{A(z)} V_A \Rightarrow V_A = \frac{N_A}{C\, y_{A(z)}}$$

b) vitesses moyenne V^*

$$\left.\begin{array}{l} J_A^* = c_A V_A^{*'} = c_A\left(V_A - V^*\right) \\ J_A^* = N_A - T_A^* = c_A V_A - T_A^* \end{array}\right\} \Rightarrow V^* = \frac{N_A\, y_{A(z)}}{C\, y_{A(z)}} = \frac{N_A}{C}$$

c) Vitesses de diffusion $V_A^{*'}$

$$V_A^{*'} = V_A - V^*$$

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

4. Quelles sont les vitesses absolues locale, moyenne et de diffusion de l'oxygène à ces positions ?

Z (cm)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$y_A(z)$	0,700	0,645	0,579	0,502	0,410	0,300
T^*_A (z) (mol/m^2 S)	0,0987	0,0909	0,0817	0,0708	0,0578	0,0425
J^*_A (z) (mol/m^2 S)	0,042	0,050	0,059	0,070	0,083	0,098
V_A (m/ S)	0,0049	0,0053	0,0060	0,0069	0,0084	0,0114
V^* (m/ S)	0,00345	0,00345	0,00345	0,00345	0,00345	0,00345
$V^{*'}_A$ (m/ S)	0,00148	0,00190	0,00250	0,00342	0,00496	0,00798

Evaluation

Considérons un transfert de matière unidirectionnelle et unidimensionnelle, s'effectuant en régime stationnaire entre deux plans parallèles distants de 0,50 cm, d'un mélange gaz comportant deux constituants : l'oxygène et l'azote. La diffusion a lieu à pression atmosphérique et à une température constante égale à 25°C.

Les concentrations en oxygène sur la surface des deux plans parallèles sont 70% et 30% en volume, respectivement.

On considère que **Il y'a une contre diffusion équimolaire des deux gaz.**

1. Calculer la densité de flux de transfert de l'oxygène (en mole/cm^2 s).
2. Déterminer la concentration en oxygène entre les deux plans aux positions suivantes : 0 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 cm.
3. Calculer les densités de flux d'oxygène dues au transport et à la diffusion entre ces plans à ces positions.
4. Quelles sont les vitesses absolues locale, moyenne et de diffusion de l'oxygène à ces positions ?

Données : Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'azote est de 0,204 cm^2/s.

M_{O2} = 32 g/mole M_{N2} = 28 g/mole

III. Transfert thermique

III.1 Généralités sur le transfert thermique

a) Introduction

b) Modes de transmission thermique

c) Champ de température

d) La conduction thermique : loi de Fourier

e) Conservation de l'énergie : Équation de l'énergie ou de la chaleur

f) Écoulement stationnaire de chaleur (pas de génération)

i) Pas de résistance au transfert

1. Mur plan

2. Mur composite multicouches

3. Conduite cylindrique creuse

4. Conduite gainée multicouches

5. Sphère creuse

ii) Résistance au transfert : La convection

1. Conductances partielles et globales de transfert par convection

2. Conduite cylindrique recouverte d'un manchon isolant

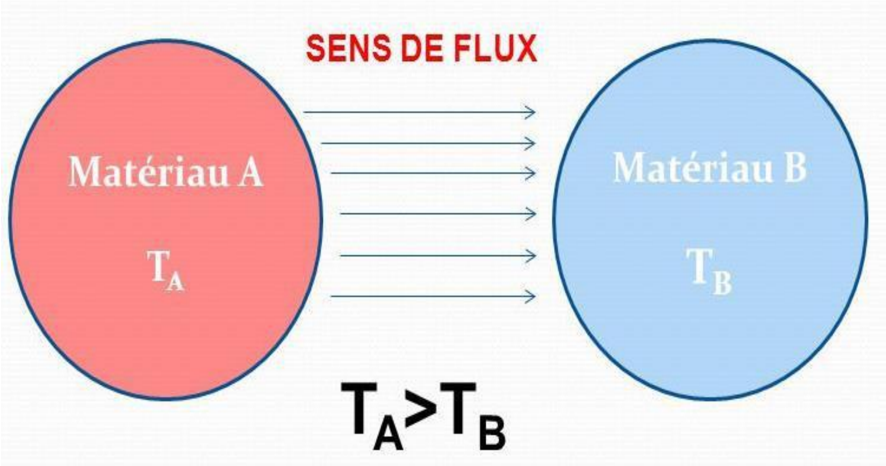
3. Détermination du coefficient thermique de convection

III.2 Echangeur de chaleur

III.1 Généralités sur le transfert thermique

a) Introduction

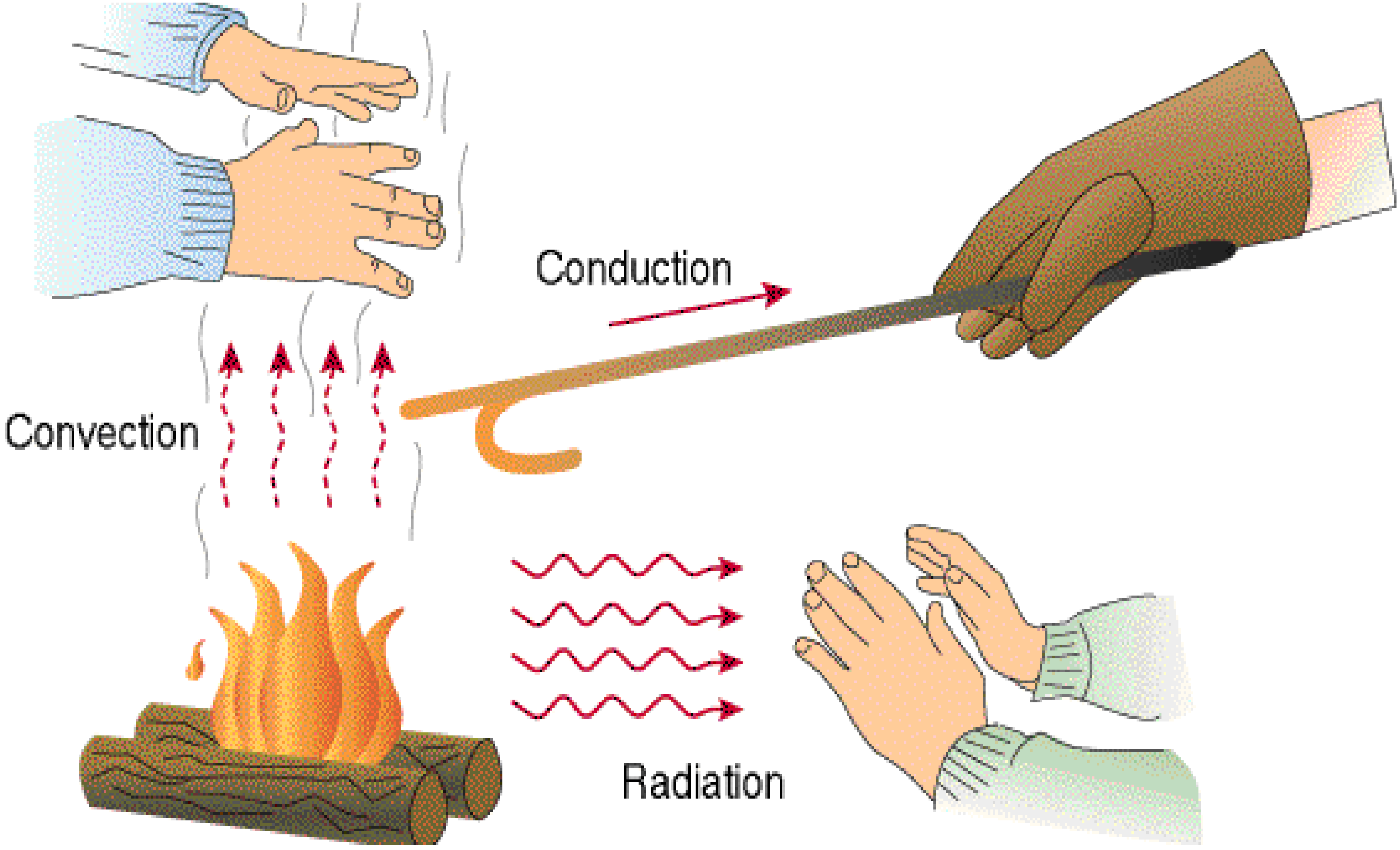
Les opérations impliquant des transferts thermiques se rencontrent dans presque toutes les usines (alimentaires, pharmaceutique,.) où les multiples procédés utilisés dans l'industrie sont très souvent le siège d'échanges de chaleur. Des connaissances de base en ce domaine sont donc nécessaires à l'ingénieur de production ou de développement.



Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cédé de la chaleur au plus froid. Il y à échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même ´électriques, centrales ´électriques au fuel au gaz, etc..., ´électronique) ou domestique (chauffage de l’habitat).

b) Modes de transmission de la chaleur

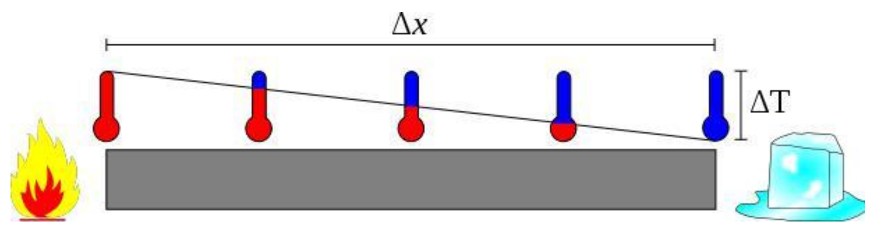
On distingue deux modes de transmission de la chaleur : conduction (conduction pur et convection) et rayonnement



La conduction (pur) :

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres..

Prenons l'exemple d'une barre métallique que l'on chauffe à l'une de ses extrémités : l'agitation thermique des atomes situés à l'extrémité chauffée de la barre augmente et se transmet de proche en proche dans la direction inverse du gradient thermique.



Dans les métaux, la conduction fait intervenir les électrons libres qui les rendent bons conducteurs de la chaleur. En revanche dans les isolants, la conduction se fait mal. En résumé, il y a une forte correspondance entre les propriétés thermiques et électriques des solides.

La convection:

C’est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l’énergie étant transmise par déplacement du fluide.

La convection concerne exclusivement les fluides (gaz ou liquides) puisqu'elle prend sa source dans un transport macroscopique de matière.

La convection a lieu par exemple lorsque l'on chauffe une casserole d'eau. Le gradient thermique vertical est dirigé vers le bas. La masse volumique

La convection a lieu par exemple lorsque l'on chauffe une casserole d'eau. Le gradient thermique vertical est dirigé vers le bas. La masse volumique du fluide inférieur s'abaisse (car celui ci est plus chaud) et le fluide s'élève pour être remplacé par du fluide plus lourd situé plus haut.

La convection tente de s'opposer au gradient thermique par un mouvement de fluide. Ce processus est associé à l'action de la gravité. On note que si l'on chauffe la casserole par le haut, le fluide chaud se situe au dessus du fluide froid et la convection est annihilée (annulé).

III. Transfert thermique

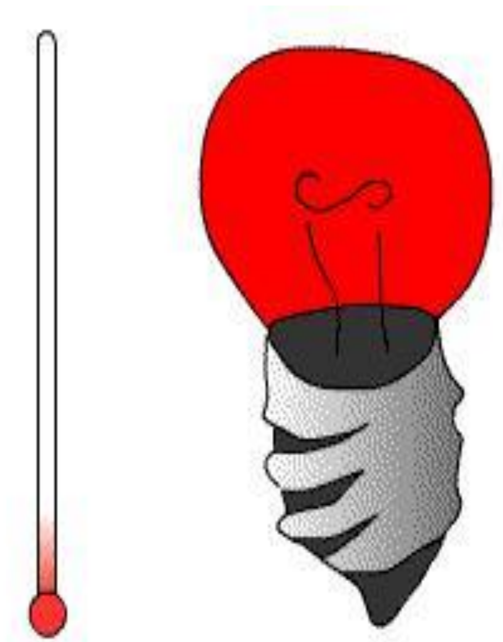
Le rayonnement:

Le rayonnement thermique est de l'énergie émise par la matière à une température finie. Le rayonnement peut provenir d'un solide, d'un liquide ou d'un gaz.

L'énergie du champ radiatif est transportée par les ondes électromagnétiques (ou, ce qui est équivalent, par les photons). Alors que la conduction requiert la présence d'un médium, le rayonnement, lui, est plus efficace dans le vide.

Exemples:

- La chaleur que reçoit la terre à partir du soleil se fait grâce aux rayonnements.
- Les plats sont chauffés dans un four à micro-ondes grâce à la chaleur transportée par des rayonnements micro-ondes.



c) Champ de températures : un champ scalaire

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x,y,z,t)$.

La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

d) Transfert de chaleur par conduction thermique : loi de Fourier

Soit un corps solide, homogène et isotrope (les propriétés physiques de ces matériaux sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace). à travers lequel passe un courant unidirectionnel de chaleur

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : le flux de chaleur transféré dans une direction donnée est proportionnel au gradient de température dans cette direction.

Le coefficient de proportionnalité k est la conductivité thermique du matériau. Elle dépend du matériau et de sa température.

La loi de Fourier s'écrit donc :

$$q_i = -k \quad \frac{\quad}{\partial x_i}$$

$$\dot{\quad} \quad \frac{\quad}{\partial x_i}$$

q : densité de flux de chaleur ($W \cdot m^{-2}$)

k : conductivité thermique du matériau ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)

$\frac{\partial T}{\partial x_i}$ gradient local de température

$\dot{q}$ flux de chaleur (W.)

S : Surface d'échange, m^2

Le signe (−) dans l'équation est dû au fait que le flux de chaleur circule dans le sens opposé au gradient de température.

Plus la conductivité thermique est élevée, plus les matériaux conduisent facilement la chaleur. Au contraire les matériaux de faible conductivité thermique conduisent difficilement la chaleur et sont donc utilisés comme isolants.

Matériaux et Alliages	**k ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$) à 20 °C**
Aluminium à 99,9 %	**228**
Aluminium à 99 %	**203**
Cuivre à 99,9 %	**386**
Etain	**61**
Fer pur	**85**
Nickel pur	**61**
Plomb pur	**35**
Zinc	**111**
Acier doux (1 % de C)	**46**
Acier inox (Cr 18 % - Ni 8 %)	**16**

SOLIDES NON METALLIQUES et gaz	**k ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$) à 20 °C**
Amiante (feuilles)	**0,162**
Béton plein	**1,7**
Briques de terre cuite pleines	**1,16**
Liège	**0,046**
Matières plastiques polyester	**0,209**
Verre pyrex	**1,16**
Electrographite	**116**

GAZ	k ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$) à 20 °C
Air	**0,024**
Acétylène	**0,019**
Anhydride carbonique	**0,014**
Oxygène	**0,024**

LIQUIDES	k ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$) à 20 °C
Eau à 20°C	**0,59**
Eau à 100°C	**0,67**
Benzène à 30°C	**0,14**
Mercure à 20°C	**0,16**

On constate que parmi les solides, **les métaux sont beaucoup plus conducteurs que les composés non métalliques** à l'exception du graphite (utilisé dans certains échangeurs de chaleur).

L'acier inoxydable est moins conducteur que la plupart des autres métaux et alliages.

On constate en général :

k des gaz < k des liquides < k des solides

e) Conservation de l’énergie : Equation de l’énergie ou de la chaleur

L’équation de l’énergie sera déduite à partir du premier principe de la thermodynamique.

Premier principe de la thermodynamique : le taux de variation de l’énergie totale d’un système est égal à la somme de chaleur reçue et du travail des forces extérieures.

$$dE_{tot} = \delta q + \delta W_{ext}$$

Objectif : Détermination du profil de température??

$$d\left(E_{microscopique} + E_{macroscopique}\right) = \delta q + \delta W_{ext}$$

$$d\int_V \left(\rho u + \frac{1}{2}\rho V^2\right) dv = \delta q + \delta W_{ext}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\rho u + \frac{1}{2}\rho V^2\right)$$

Puissance calorifique

Puissance développée par

III. Transfert thermique

$$\frac{d(\rho\, CpT)}{dt} + p\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \tau_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{dp}{dt} + \sum (Q_{kk}\, m) \qquad (I.1)$$

q_i ϕ q_g

On considérera (dans ce cours) que :

❶ Si les propriétés physiques (ρ, Cp et k) sont constantes et uniformes ;

❷ Si la fonction de dissipation ϕ est négligeable devant la puissance calorifique échangée ;

❸ S'il s'y a pas de réactions chimiques (chaleur de formation des nouveaux corps nulle) et pas de sources de chaleur ;

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \alpha\Delta T \qquad (I.2)$$

❹ S'il le transfert thermique a lieu dans un **solide** → $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\, \Delta T$ (Equation de Fourier) (I.3)

❺ Si l'écoulement est stationnaire → $\nabla^2 T = 0$ (Equation de Laplace) (I.4)

f) Écoulement stationnaire de chaleur

Hypothèses :

❶ Pas de génération de chaleur.

❷ $k \neq k(p,T)$.

❸ $T = T(x)$.

→ Conditions aux limites

→ Ecoulement unidirectionnel de chaleur : $T = T(x)$ et unidirectionnel : $q = q_x$

→ $k = Cte.$

V. Transfert thermique

f) Écoulement **stationnaire** *de chaleur (k = Cte)*

1. Conduction à travers un mur plan homogène (sans résistance thermique de convection)

$$\Delta T = 0 \longrightarrow \frac{dT}{dx} = Ct\,e$$

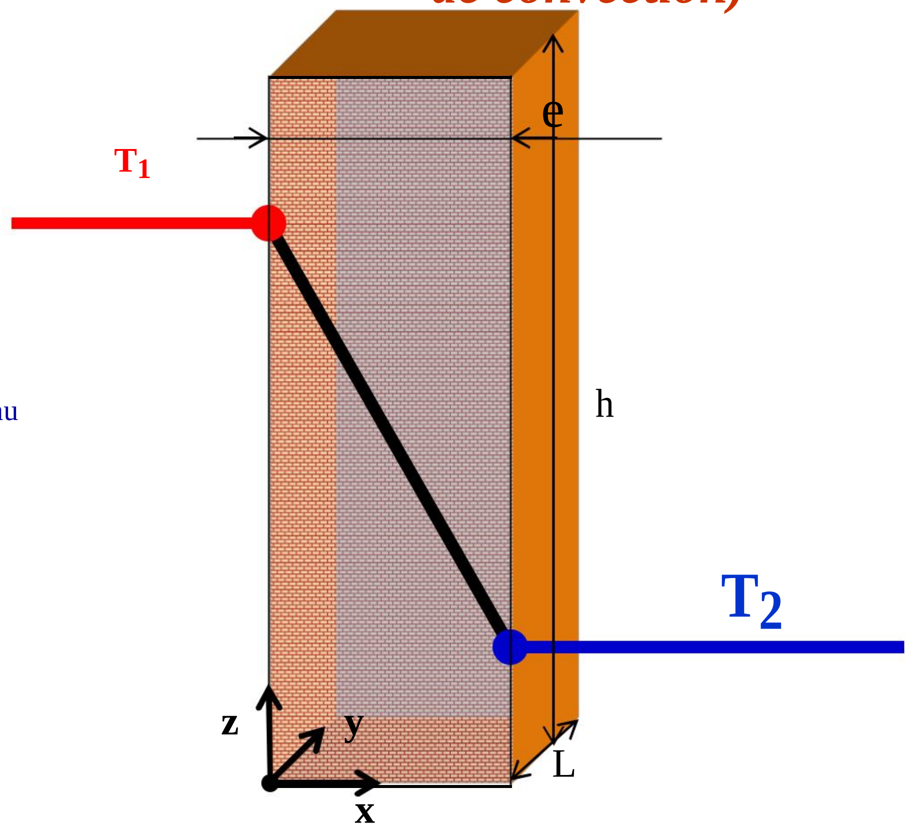
Conditions aux limites

Écoulement unidirectionnel de chaleur : $T = T(x)$

Écoulement unidirectionnel de chaleur : $q = q(x)$

$$q = q_x = -k\,S\,\frac{dT}{dx} = Cte$$

S: Surface orthogonale au flux thermique : $S = L\,h$



$$q \int_{x_1=0}^{x_2=e} dx = -k\,S \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q(\underbrace{x_2 - x_1}_{e}) = -k\,S\underbrace{(T_2 - T_1)}_{-\Delta T}$$

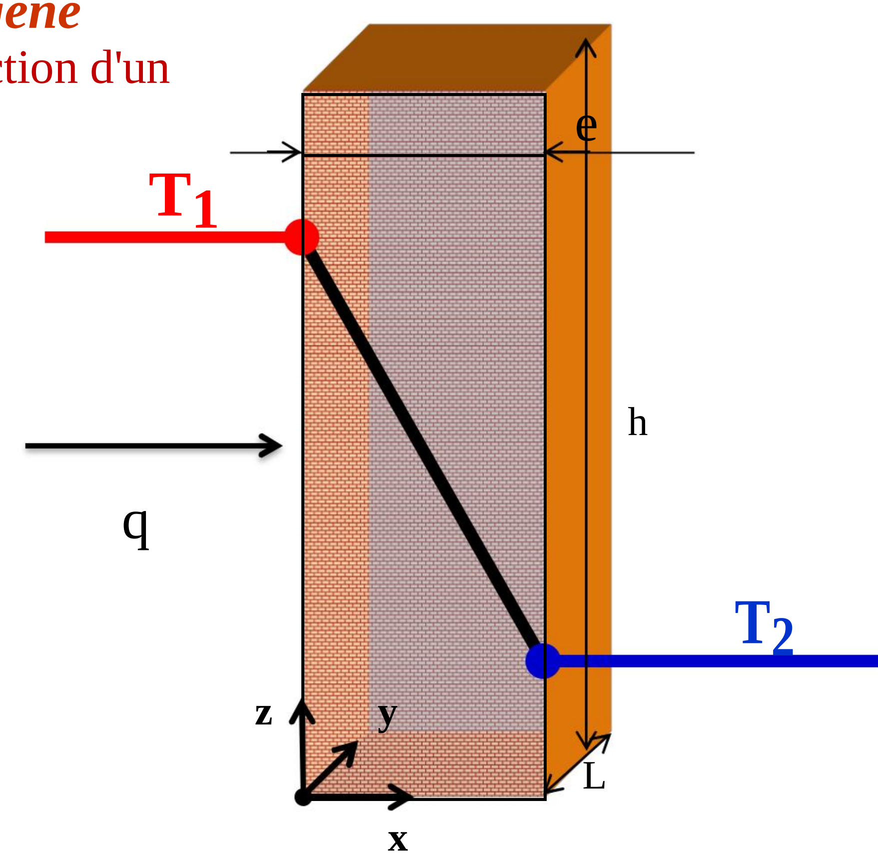
$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e}{k}\right]} = \frac{\Delta T}{\Re_k} \qquad \text{(III.13)}$$

$$q = \frac{q}{S} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e}{k}\right]} = k\,\frac{\Delta T}{e} \qquad \text{(III.14)}$$

f) Écoulement **stationnaire** *de chaleur (k = Cte)*

1. Conduction à travers un mur plan homogène

Expression de la résistance thermique de conduction d'un mur plan

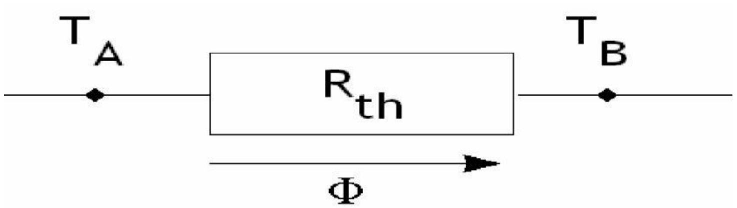


Comme en électricité, **la résistance** est le rapport d'une différence de potentiel donc ici de température et d'un débit d'énergie (flux thermique), donc ici **le flux** , d'où l'expression suivante de **la résistance thermique**

Par analogie thermique et électrique

$$\mathfrak{R}_{Elec} = \frac{\Delta U}{I} \quad \text{(III.14.1)}$$

$$\mathfrak{R}_{T} = \frac{\Delta T}{q} = \frac{e}{k_T S} \quad \text{(III.14.2)}$$



V. Transfert thermique

f) Écoulement **stationnaire** de chaleur ($k = Cte$)

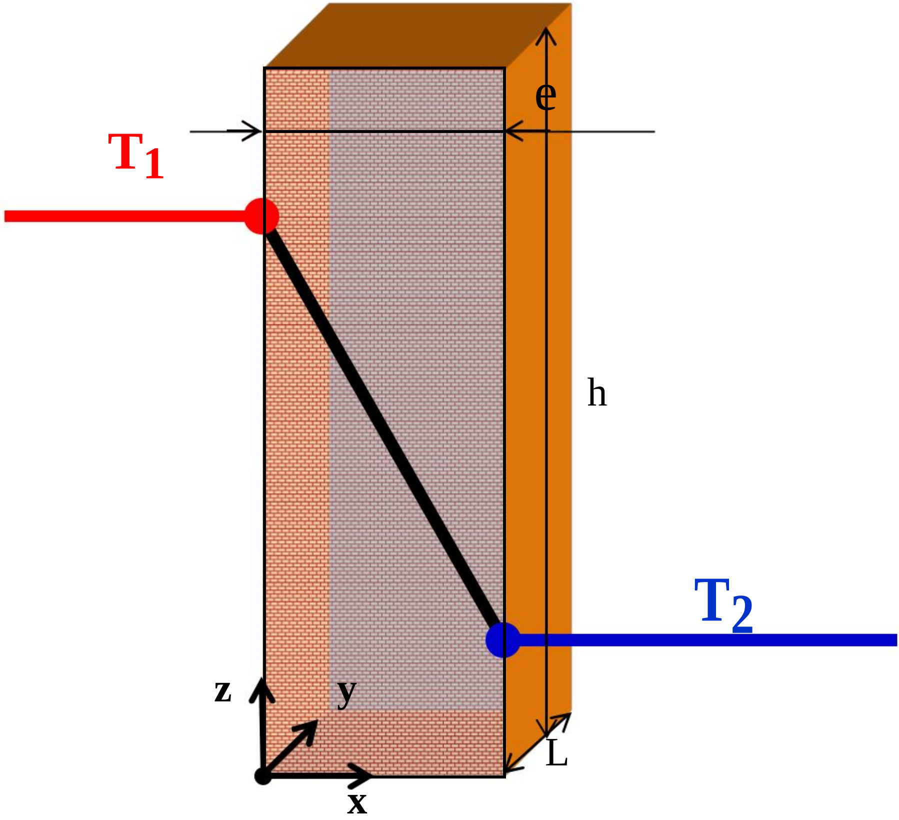
1. Conduction à travers un mur plan homogène

Profil de température T(x)=??

$$q\int_{x_1=0}^{x_2=x} dx = -k_T S\int_{T_1}^{T(x)} dT$$

$$q(x - x_1) = -k_T S\,(T(x) - T_1)$$

x



Écoulement unidirectionnel de chaleur : $T = T(x)$

Écoulement unidirectionnel de chaleur : $q = q(x) = cts$

$$q = \frac{(T_1 - T(x))}{\left[\dfrac{x - x_1}{k_T S}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{e}{k_T S}\right]}$$

$$T(x) = T_1 - \frac{(x - x_1)}{e}(T_1 - T_2) \qquad \text{(III.15)}$$

Exemple d'application 1 :

- Calculer le flux traversant une vitre de 1 m² de surface et d'épaisseur e_v
  La température de la face interne de la vitre est T_1 et celle de la face externe est T_2.

- En déduire la résistance thermique de la
  vitre. la Conductivité thermique du verre k_v

- Pour les mêmes températures de paroi, calculer le flux traversant un m² de mur de briques d'épaisseur e_b. En déduire la résistance thermique.

La Conductivité thermique des briques k_b :

Données :

T_1 = 10 °C, T_2 = 5 °C ; k_v = 0,7 $W.m^{-1}.K^{-1}$; e_v = 3,5 mm ; e_b = 26 cm ; k_b = 0,52 $W.m^{-1}.K^{-1}$

Correction exemple d'application 1 :

- Calculer le flux traversant une vitre de 1 m² de surface et d'épaisseur e_v
La température de la face interne de la vitre est T_1 et celle de la face externe est T_2.

Hypothèses :
❶ Pas de génération de chaleur.
❷ $k \neq k(p,T)$.
❸ $T = T(x)$.

$$\Delta T = 0 \longrightarrow \frac{dT}{dx} = Cte$$

La loi de Fourier

$$q = q_x = -k\, S \frac{dT}{dx} = Cte \longrightarrow q \int_{x_1=0}^{x_2=e_v} dx = -k_v\, S \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e_v}{k_v\, S}\right]} \longrightarrow q = \frac{(10-5)}{\left[\frac{3{,}5\,10^{-3}}{0{,}7\;1}\right]} = 1000W$$

V. Transfert thermique

Correction exemple d'application 1 :

- En déduire la résistance thermique de la vitre.

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{e_v}{\kappa_v S}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{R} \longrightarrow R_v = \left[\frac{e_v}{\kappa_v S}\right] = \frac{(T_1 - T_2)}{q} = \left[\frac{3{,}5\,10^{-3}}{0{,}7\;1}\right] = 5\,10^{-3}\ °C/W$$

- Pour les mêmes températures de paroi, calculer le flux traversant un m² de mur de briques d'épaisseur e_b. En déduire la résistance thermique.

$$q' = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{e_b}{\kappa_b S}\right]} \longrightarrow q' = \frac{(10 - 5)}{\left[\dfrac{26\,10^{-2}}{0{,}52\;1}\right]} = 10\,W$$

$$R_b = \left[\frac{e_b}{\kappa_b S}\right] = \frac{(T_1 - T_2)}{q'} = \left[\frac{26\,10^{-2}}{0{,}52\;1}\right] = 0{,}5\ °C/W$$

Analyse des résultats : Pour une même surface et un même écart de température, le flux perdu par la vitre est 100 fois plus élevé que celui perdu par le mur de briques dont la conductivité est plus faible et dont l'épaisseur est beaucoup plus élevée que celle de la vitre.

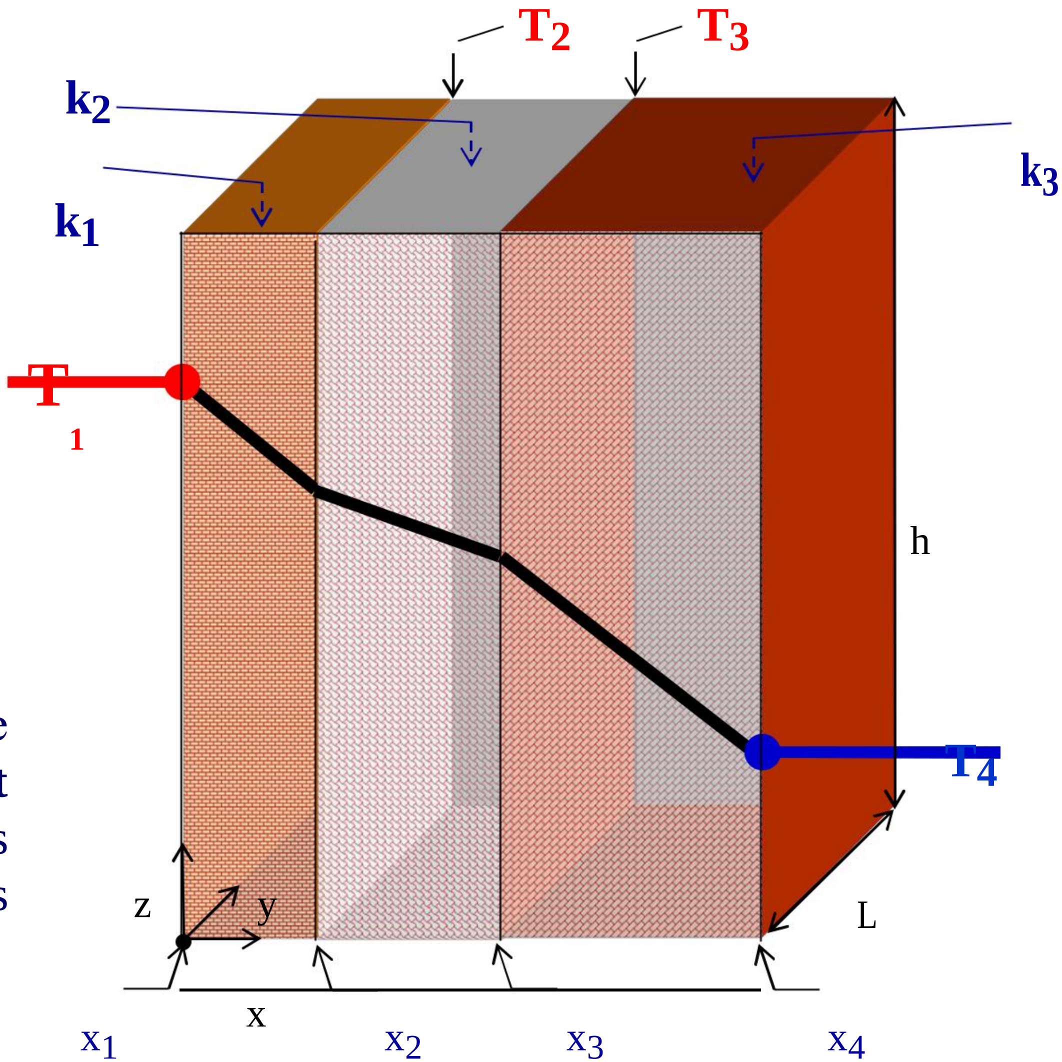
2. Mur composite multicouches (Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série)

Considérons **plusieurs murs** limités par des plans parallèles, constitués par des matériaux de conductivités différentes, mais en contact parfait.

Soient $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$, $\mathbf{k_3}$, les conductivités thermiques moyennes de chaque mur dont les épaisseurs sont respectivement

$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$.

Chaque mur est donc traversé par le même flux thermique Φ.



On peut écrire d'après la partie précédente (un mur) **le flux traversant chaque mur**, et en déduire les différences de température entre les faces de chaque mur :

2. Mur composite multicouches (Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série)

Pour le mur 1 :

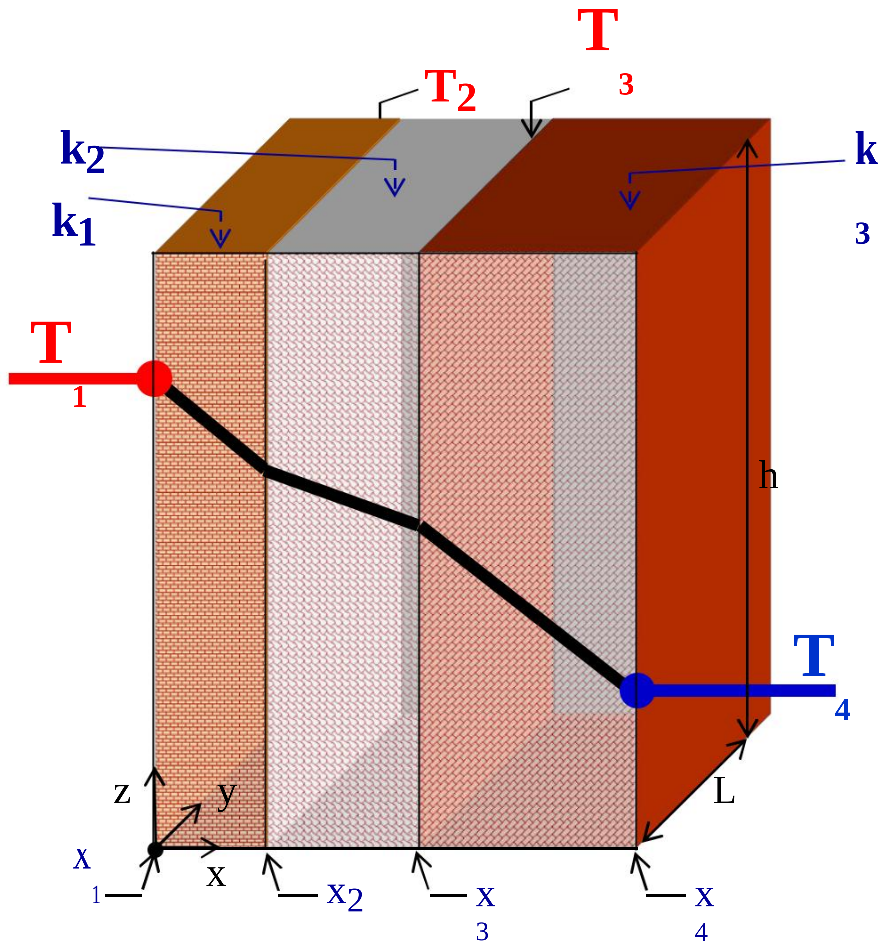
$$(T_1 - T_2) = q\left(e_1 / k_1 S\right)$$

Pour le mur 2 : $\oplus$

$$(T_2 - T_3) = q\left(e_2 / k_2 S\right)$$

Pour le mur 3 : $\oplus$

$$(T_3 - T_4) = q\left(e_3 / k_3 S\right)$$

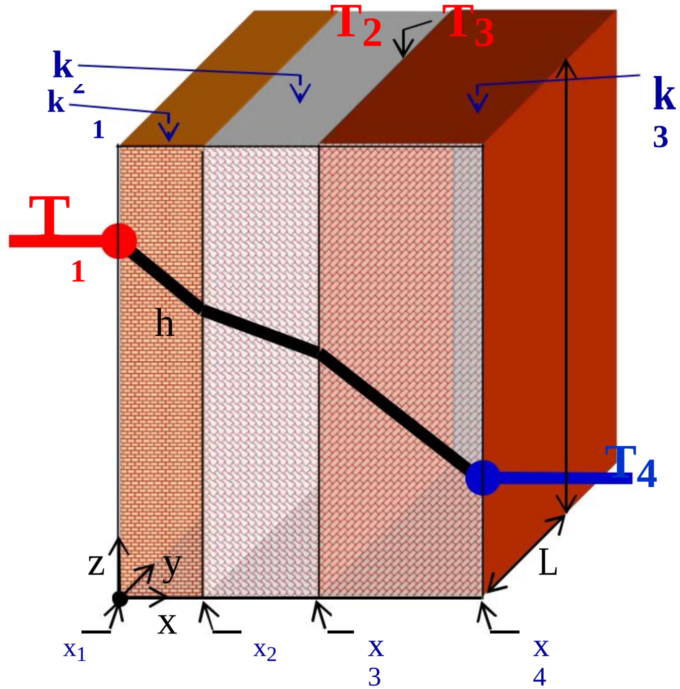


$$\phi = q = \frac{(T_1 - T_4)}{\left[\left(\frac{e_1}{k_1 S}\right) + \left(\frac{e_2}{k_2 S}\right) + \left(\frac{e_3}{k_3 S}\right)\right]} = \frac{\Delta T}{\sum_i (\Re_k)_i} \qquad (V.15)$$

2. Mur composite multicouches (Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série)

Expression de la résistance thermique équivalente à des murs en série

L'expression précédente du flux peut être en faisant passer **S** au dénominateur :



$$q = \frac{1}{\left[\underbrace{\left(\frac{e_1}{k_1 S}\right)}_{R1} + \underbrace{\left(\frac{e_2}{k_2 S}\right)}_{R2} + \underbrace{\left(\frac{e_3}{k_3 S}\right)}_{R3} \right]} (T_1 - T_4)$$

$$q = \frac{1}{[R_1 + R_2 + R_3]} (T_1 - T_4)$$

Ces 3 résistances sont placées en série et leur somme constitue la résistance thermique équivalente des 3 murs en série, soit :

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \qquad q = \frac{1}{R}(T_1 - T_4)$$

Comme en électricité, la résistance thermique équivalente des murs en série est la somme des résistances thermiques de chaque mur.

Exemple d'application 2 :

Etude des pertes par conduction à travers un double vitrage

Un double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche d'air sec immobile. L'épaisseur de chaque vitre est de e_v et celle de la couche d'air est de e_a.

La conductivité thermique du verre est k_v et celle de l'air est k_a sur le domaine de température étudié. Pour une chute de température de ΔT entre les deux faces externes du double vitrage.

- calculez les pertes thermiques pour une surface de vitre S. (Note : ce calcul néglige l'effet du coefficient de convection de part et d'autre de chaque vitre).

- Comparez ces pertes thermiques à celles qui seraient obtenues avec une seule vitre d'épaisseur e_v .

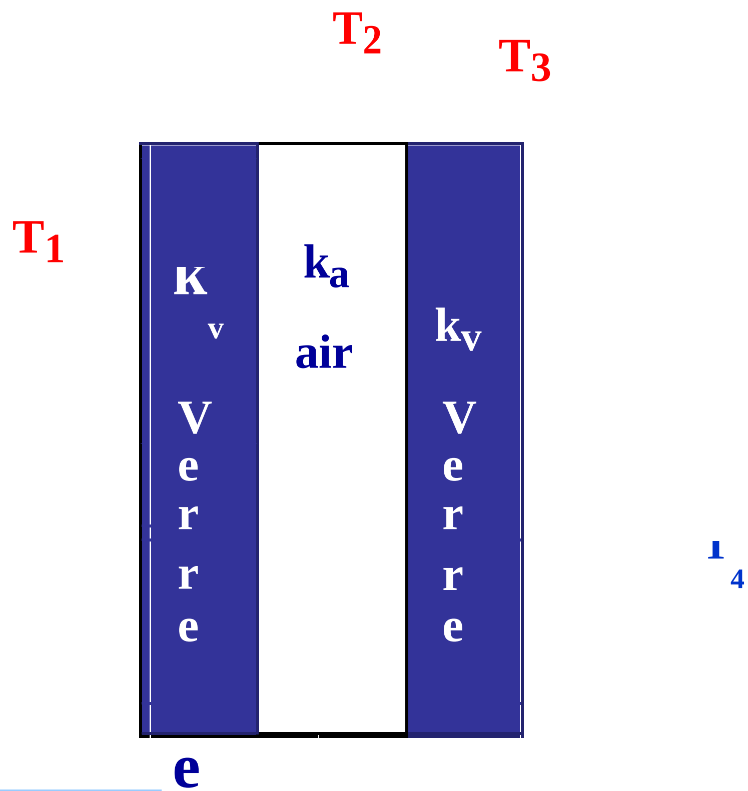
Données : e_v = 3,5 mm ; e_a = 12 mm ; k_v = 0,7 $W.m^{-1}.°C^{-1}$; k_a = 0,024 $W.m^{-1}.°C^{-1}$; ΔT = 5°C; S = 1m^2

V. Transfert thermique

Exemple d'application 2 :

Etude des pertes par conduction à travers un double vitrage

Un double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche d'air sec immobile. L'épaisseur de chaque vitre est de e_V et celle de la couche d'air est de e_a.



1. calculez les pertes thermiques pour une surface de vitre S.

Hypothèses : ❶ Pas de génération de chaleur.

❷ $k \neq k(p,T)$.

❸ $T = T(x)$.

$$\Delta T = 0 \qquad \frac{dT}{dx} = Cte$$

$$q = q_x = -k\,S\,\frac{dT}{dx} = Cte$$

$$q\int_{x_1=0}^{x_2=e_V} dx = -k_V S \int_{T_1}^{T_2} dT$$

e_V e_a e_V

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{e_V}{k_V S}\right]}$$

V. Transfert thermique

Exemple d'application 2 :

1. calculez les pertes thermiques pour une surface de vitre S.

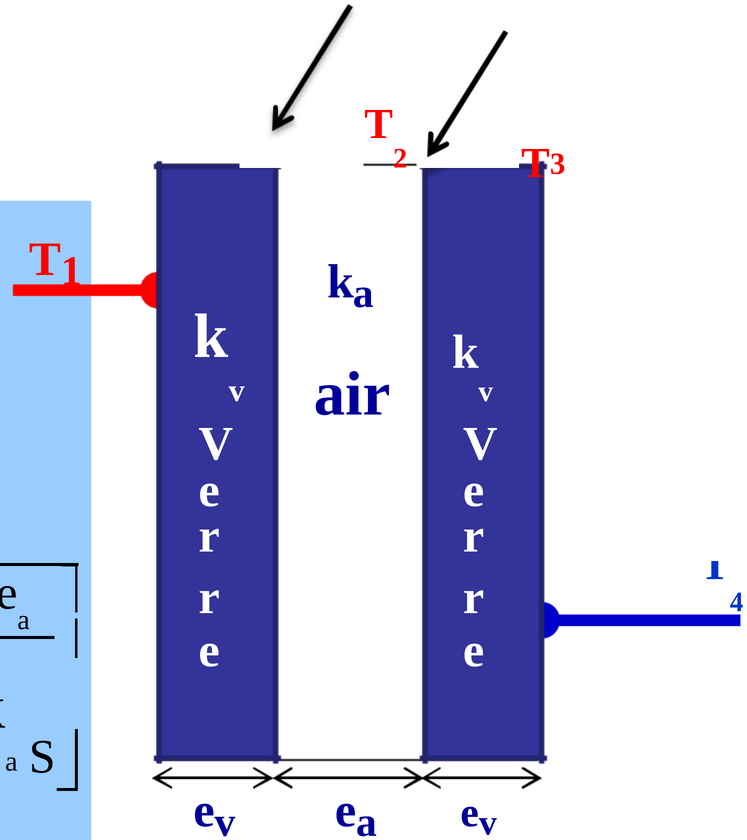
Hypothèses :

❶ Pas de génération de chaleur.

❷ $k \neq k(p,T)$.

❸ $T = T(x)$.

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{e_v}{k_v S}\right]} \\ q &= \frac{(T_2 - T_3)}{\left[\dfrac{e_a}{k_a S}\right]} \\ q &= \frac{(T_3 - T_4)}{\left[\dfrac{e_v}{k_v S}\right]} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\Rightarrow \quad q = \frac{(T_1 - T_4)}{\left[\dfrac{2\,e_v}{k_v S} + \dfrac{e_a}{k_a S}\right]} = \frac{\Delta T}{\left[\dfrac{2\,e_v}{k_v S} + \dfrac{e_a}{k_a S}\right]}$$



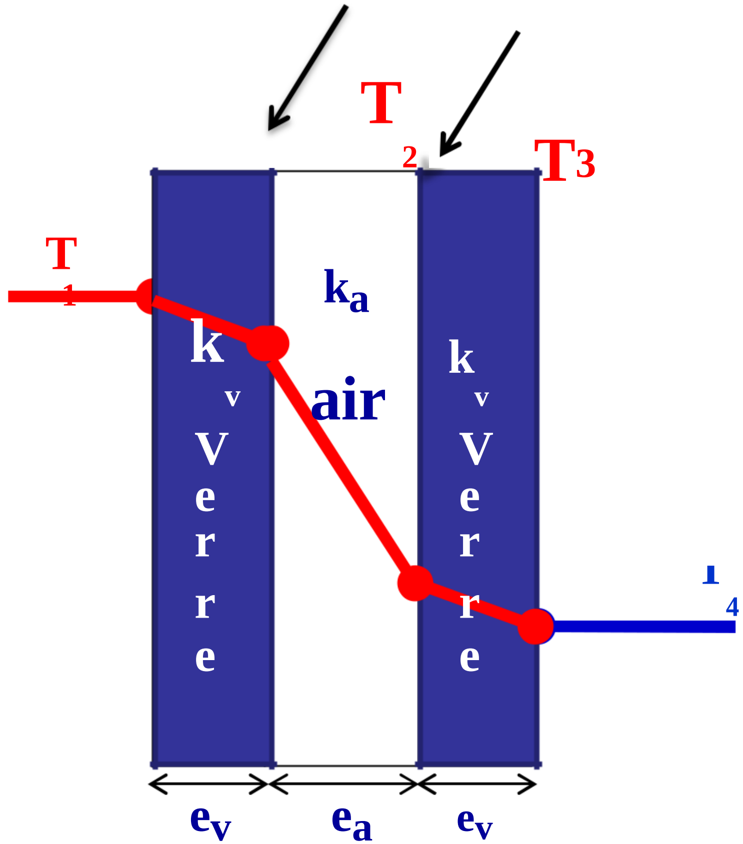
Exemple d'application 2 :

1. calculez les pertes thermiques pour une surface de vitre S.

AN :

$$q = \frac{\Delta T}{\left[\frac{2 e_v}{k_v S}\right] + \left[\frac{e_a}{k_a S}\right]}$$

$$q = \frac{5}{\left[\frac{2\ 3{,}5\,10^{-3}}{0{,}7\ 1}\right] + \left[\frac{12\ 10^{-3}}{0{,}024\ 1}\right]} = \frac{5}{0{,}01 + 0{,}5} = 9{,}8\,W$$

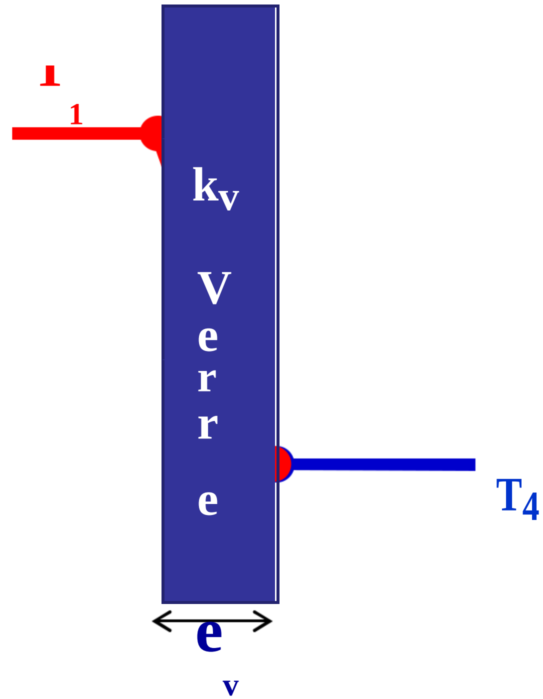


V. Transfert thermique

Exemple d'application 2 :

2. Comparez ces pertes thermiques à celles qui seraient obtenues avec une seule vitre d'épaisseur e_V.

$$q' = \frac{\Delta T}{\left[\frac{e_V}{k_V S}\right]} = \frac{5}{\left[\frac{3{,}5\,10^{-3}}{0{,}7\ 1}\right]} = \frac{5}{0{,}005} = 1000\ \text{W}$$

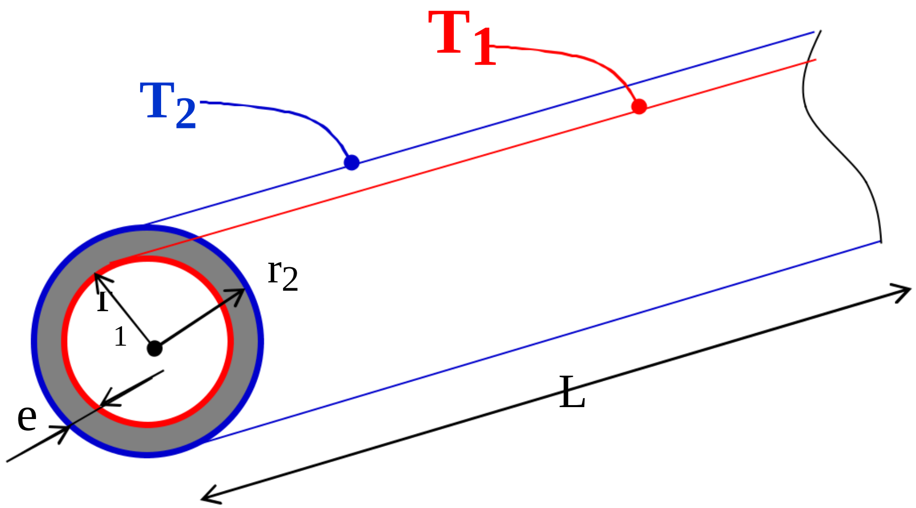


Conclusion : Si on considère uniquement les échanges par conduction (on verra au chapitre suivant (convection) que le résultat est modifié du fait des échanges par convection), le double vitrage permet de réduire 100 fois les pertes thermiques à travers la vitre. Ceci est surtout dû à la résistance thermique très élevée de la couche d'air, car l'air a une faible conductivité thermique .

f) Écoulement stationnaire de chaleur ($k = Cte$)

3. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique

Considérons un tube cylindrique *(voir figure)*
Soient r_1 le rayon de la paroi interne, r_2 celui de la paroi externe, T_1 et T_2, les températures respectives des faces interne et externe et k la conductivité thermique du matériau constituant le tube.



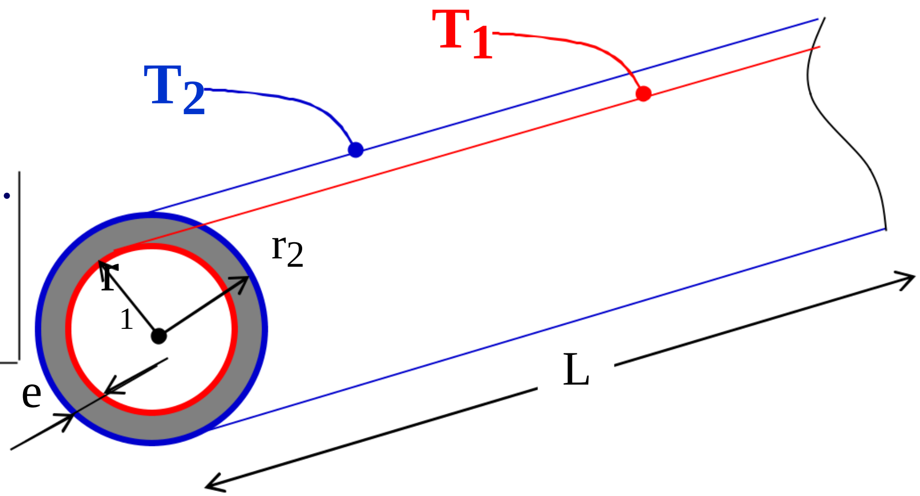
a. Expression du flux thermique à travers un tube cylindrique

On désire connaître le flux thermique qui traverse le tube de l'intérieur vers l'extérieur (lorsque $T_1 > T_2$) pour une longueur L de tube. Par raison de symétrie, les lignes d'écoulement de la chaleur sont des droites dirigées selon des rayons. On dit que le transfert de chaleur est radial

f) Écoulement stationnaire de chaleur (k = Cte)

3. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique

a. Expression du flux thermique et le profil de température



Hypothèses :

1. Pas de génération de chaleur.
2. $k \neq k(p,T)$.
3. $T = T(r)$.

→ Conditions aux limites

→ Ecoulement unidirectionnel de chaleur : $T = T(r)$
et unidimensionnel : $q = q_r$

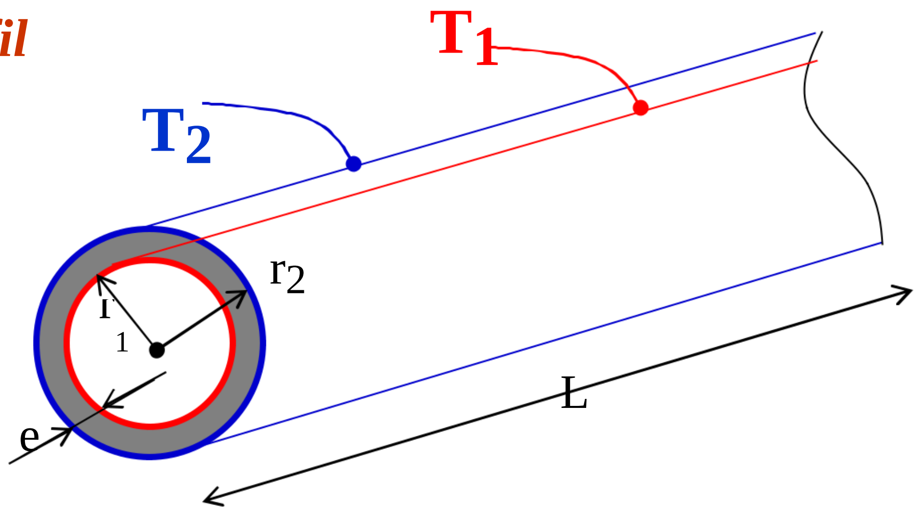
→ $k = Cte$.

V. Transfert thermique

f) Écoulement **stationnaire** de chaleur ($k = Cte$)

3. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique

a. Expression du flux thermique et le profil de température



$$\phi = q = q_r S(r) = -k \frac{dT}{dr}(2\pi r L) = Cte$$

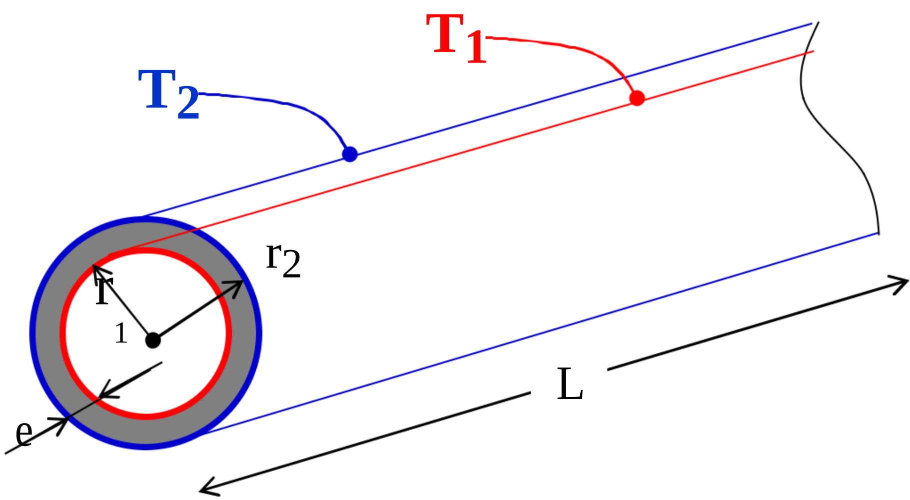
$$q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi L k \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{\ln\left(r_2 / r_1\right)}{2\pi k L}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathfrak{R}_k}} \Rightarrow \boxed{T(r) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(r_2 / r_1)} \ln(r / r_1)}$$

Remarque : L >> D, la transfert thermique est purement radial *f) Écoulement* ***stationnaire*** *de chaleur (k = Cte)*

3. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique

b. Expression de la résistance thermique d'un tube cylindrique



A partir de l'expression du flux, on déduit l'expression de la résistance thermique d'un tube **:**

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_k}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{R}_k = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L}$$

Exemple d'application 1 :

Soit un tube d'acier d'un rapport de rayon (r_1/r_2) dont la température de la paroi interne est T_1 et celle de la paroi externe T_2.
La conductivité thermique de l'acier k.

Calculer :
a) la résistance thermique du tube pour une longueur de 1 m.
b) le flux correspondant.

Données :

T_1= 119,75°C, T_2= 119,64°C ; k = 46 $W.m^{-1}$ $°C^{-1}$; r_1/r_2 = 20/27

Correction exemple d'application 1 :

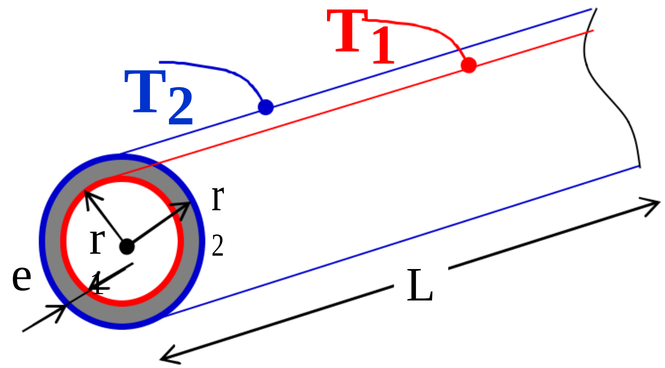
a) la résistance thermique du tube pour une longueur de 1 m.

Hypothèses :

❶ Pas de génération de chaleur.

❷ $k \neq k(p,T)$.

❸ $T = T(r)$.



$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathfrak{R}_k} \Longrightarrow \mathfrak{R}_k = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L}$$

$$\mathfrak{R}_k = \frac{\ln(27/20)}{2\,\pi\,46\,1} = 1{,}038\;10^{-3}\ °C.W^{-1}$$

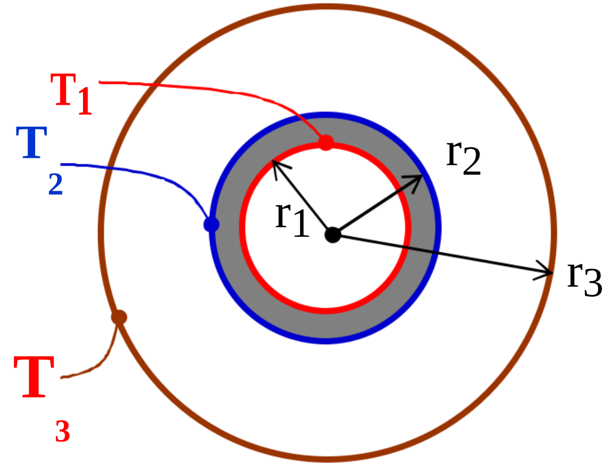
b) Le flux correspondant.

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathfrak{R}_k} = \frac{(119{,}75 - 119{,}64)}{1{,}038\,10^{-3}} = 105{,}97\ W$$

f) Écoulement ***stationnaire*** *de chaleur (k = Cte)*

4. Conduction à travers deux tubes concentriques accolés (multicouches)

Considérons 2 tubes concentriques de longueur L en contact thermique parfait (voir figure **)**



T_1 est la température de la face interne du tube 1 de conductivité thermique k_1 .

T_3 est la température de la face externe du tube 2 de conductivité thermique k_2 .

T_2 est la température de l'interface entre les 2 tubes

i

$$(T_1 - T_2) = \frac{q}{2\pi\, k_1\, L} \ln\left(r_2 / r_1\right)$$

$$(T_2 - T_3) = \frac{q}{2\pi\, k_2\, L} \ln\left(r_3 / r_2\right)$$

$\oplus \quad \Rightarrow$

$$q = \frac{\Delta T}{\sum (\mathcal{R}_k)_i}$$

$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\left[\dfrac{\ln\left(r_2 \; r_1\right)}{2\pi\, k_1\, L}\right] + \left[\dfrac{\ln\left(r_3 \; r_2\right)}{2\pi\, k_2\, L}\right]}$$

Exemple d'application 2 :

L'intérieur du tube (rapport de rayon (r_1/r_2)) étudié dans l'exemple précédent est entartré sur une épaisseur de e .

On suppose que les températures intérieures et extérieures restent inchangées : la température de la paroi interne est T_1 et celle de la paroi externe T_2.

Conductivité thermique du tartre k_c

Calculer :

a) la résistance thermique de la couche de tartre (pour une longueur de 1 m).

b) la résistance équivalente du tube entartré.

c) le flux thermique correspondant.

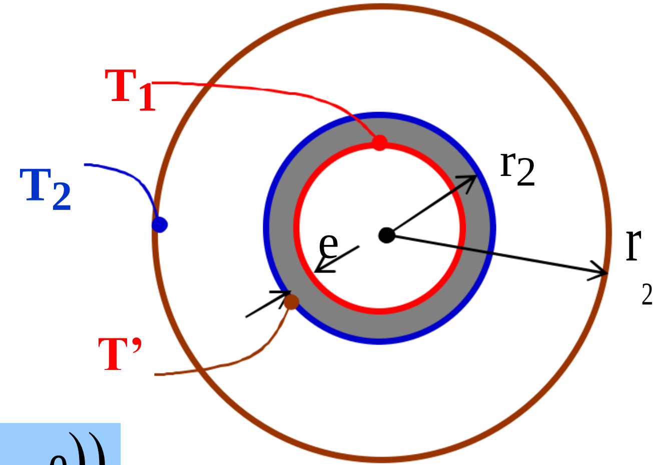
Données :

T_1= 119,75°C, T_2= 119,64°C ; k = 46 W.m^{-1} °C^{-1} ; r_1/r_2 = 20/27 ; e =2 mm

Correction exemple d'application 2 :

a) la résistance thermique de la couche de tartre (pour une longueur de 1 m).

Hypothèses :
❶ Pas de génération de chaleur.
❷ $k \neq k(p,T)$.
❸ $T = T(r)$.



$$q = \frac{(T_1 - T')}{\left[\dfrac{\ln\left(r_1/(r_1 - e)\right)}{2\pi\, k_c\, L}\right]} = \frac{(T_1 - T')}{\mathcal{R}_c} \Longrightarrow \mathcal{R}_c = \frac{\ln\left(r_1/(r_1 - e)\right)}{2\,\pi\, k_c\, L}$$

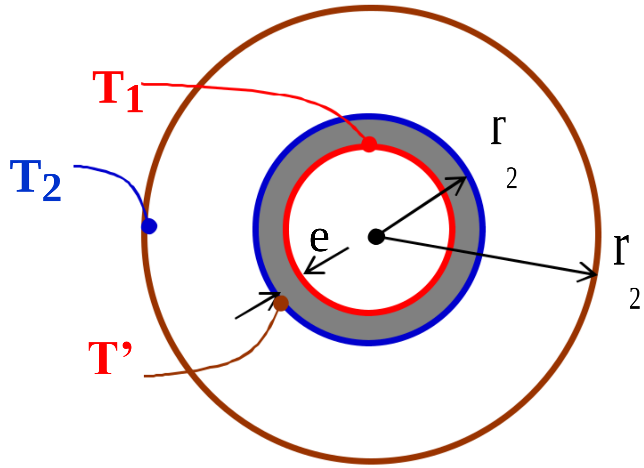
$$\mathcal{R}_c = \frac{\ln\left(20/(20-2)\right)}{2\pi\; 2{,}2\; 1} = 1{,}614.10^{-2}\,°C.W^{-1}$$

Correction exemple d'application 2 :

b) la résistance équivalente du tube entartré

La résistance équivalente du tube entartré est la somme de la résistance de la couche de tartre et de la résistance du tube en acier calculée précédemment soit :

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{\ln(r_1/(r_1 - e))}{2\pi k_c L} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_t L}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_{eq}}$$



$$\Downarrow$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_k = \frac{\ln(r_1/(r_1 - e))}{2\pi k_c L} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_t L}$$

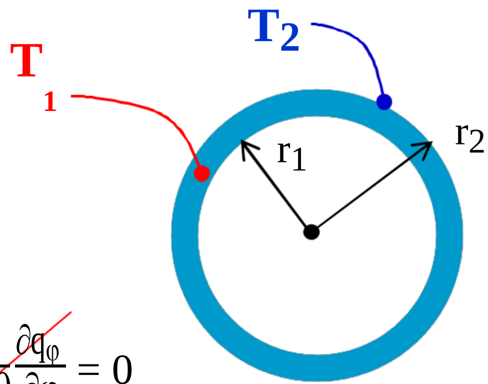
$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_k = 1{,}614.10^{-2} + 1{,}038.10^{-3} = 1{,}718.10^{-2}\ °C.W^{-1}$$

c) le flux thermique correspondant.

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{(119{,}75 - 119{,}65)}{1{,}71810^{-2}} = 6{,}4\ W$$

f) Écoulement ***stationnaire*** *de chaleur (k = Cte)*

5. Conduction à travers une Sphère creuse : $T_1 > T_2$)



$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 q_r\right) + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, q_\theta\right)} + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial q_\varphi}{\partial\varphi}} = 0 \\ k\,\Delta T \quad k\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)} + \cancel{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}}\right] = 0 \end{cases}$$

Flux de chaleur

$$q = \phi = q_r\,\underbrace{4\pi r^2}_{S(r)} = Cte \longrightarrow q\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -4\pi k\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\boxed{q = \phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi k}}}$$

Profil de température

$$\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = A \longrightarrow T(r) = \frac{A}{r} + B$$

$$\boxed{T(r) = \frac{A}{r} + B}$$

CL1: $r = r_1 \longrightarrow T(r_1) = T_1$

CL2: $r = r_2 \longrightarrow T(r_2) = T_2$

$$A = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$B = T_1 - \left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$\boxed{T(r) = T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

h) Transmission de chaleur par convection (Résistance au transfert)

La convection est le mode de propagation de la chaleur dans un fluide (liquide ou gazeux) **en mouvement**. La transmission de la chaleur entre un solide et un fluide s'effectue par l'action combinée de la conduction et de la convection.

existe deux types de transferts convectifs :

1. La ***convection forcée*** dans laquelle l'écoulement du fluide est force par un dispositif mécanique quelconque (pompe ou gravite pour un liquide, ventilateur pour de l'air) ;

2. La ***convection naturelle*** : lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un fluide, le fluide chaud, qui aura une masse volumique plus faible que le fluide froid aura tendance à monter sous l'effet de la poussée d'Archimède.

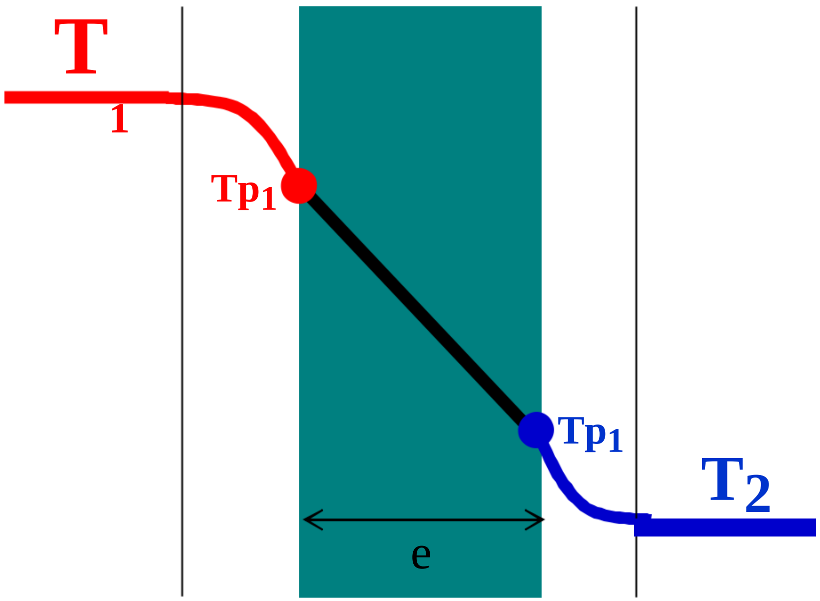
Donc la convection C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$q = h\, S\, (T_f - T_p)$$

ϕ Flux de chaleur transmis par convection (W)
h Coefficient de transfert de chaleur par convection (W m-2 °C-1)
Tp Température de surface du solide (°C)
T_∞ ou T_f : Température du fluide loin de la surface du solide (°C)
S Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2)

V. Transfert thermique

a. Mur plan homogène (avec résistance du convection)



$$(T_1 - Tp_1) = \frac{q}{h_1 S} \quad \oplus$$

$$(Tp_1 - Tp_2) = \frac{q}{(k\,S/e)} \quad \oplus$$

$$(Tp_2 - T_2) = \frac{q}{h_2 S}$$

$$\phi = q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{1}{h_1 S}\right] + \left[\frac{e}{k S}\right] + \left[\frac{1}{h_2 S}\right]} \qquad (V.23)$$

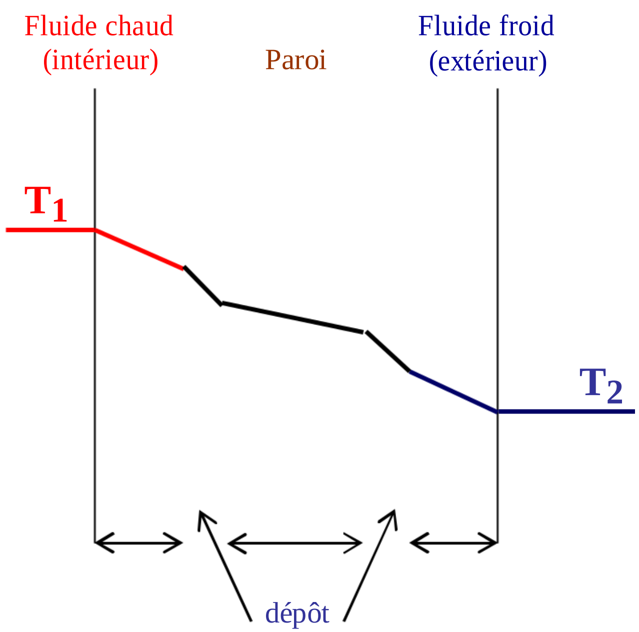
Les coefficients h_1 et h_2 représentent les coefficients de transfert partiel (ou conductance partielle de transfert) interne et externe.

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{1}{U S_m}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\left(\frac{1}{h_1 S}\right) + \left(\frac{e}{k S}\right) + \left(\frac{1}{h_2 S}\right)\right]} \qquad (V.24)$$

Le coefficient U représente une conductance globale de transfert et S_m désigne une valeur moyenne de la surface solide de séparation.

2. Coefficient de transfert global U

L'étude du transfert thermique entre le fluide chaud (1) et le fluide froid (2) au travers de la paroi fait apparaître dans le cas le plus général les 5 résistances de transfert indiquées sur la figure ci-dessous :



La résistance globale au transfert est donnée par la relation :

$$\Re_{tot} = \Re_1 + \Re_{d1} + \Re_p + \Re_{d2} + \Re_2 \qquad (V.25)$$

$R_1 = (1/h_1S_1)$ est la résistance de transfert par convection côté fluide chaud.

R_{d1} : est la résistance de transfert par conduction au sein du dépôt d'encrassement côté fluide chaud.

R_p : est la résistance de transfert par conduction dans la paroi métallique. (Dans la plupart des cas, cette résistance est négligeable devant les autres).

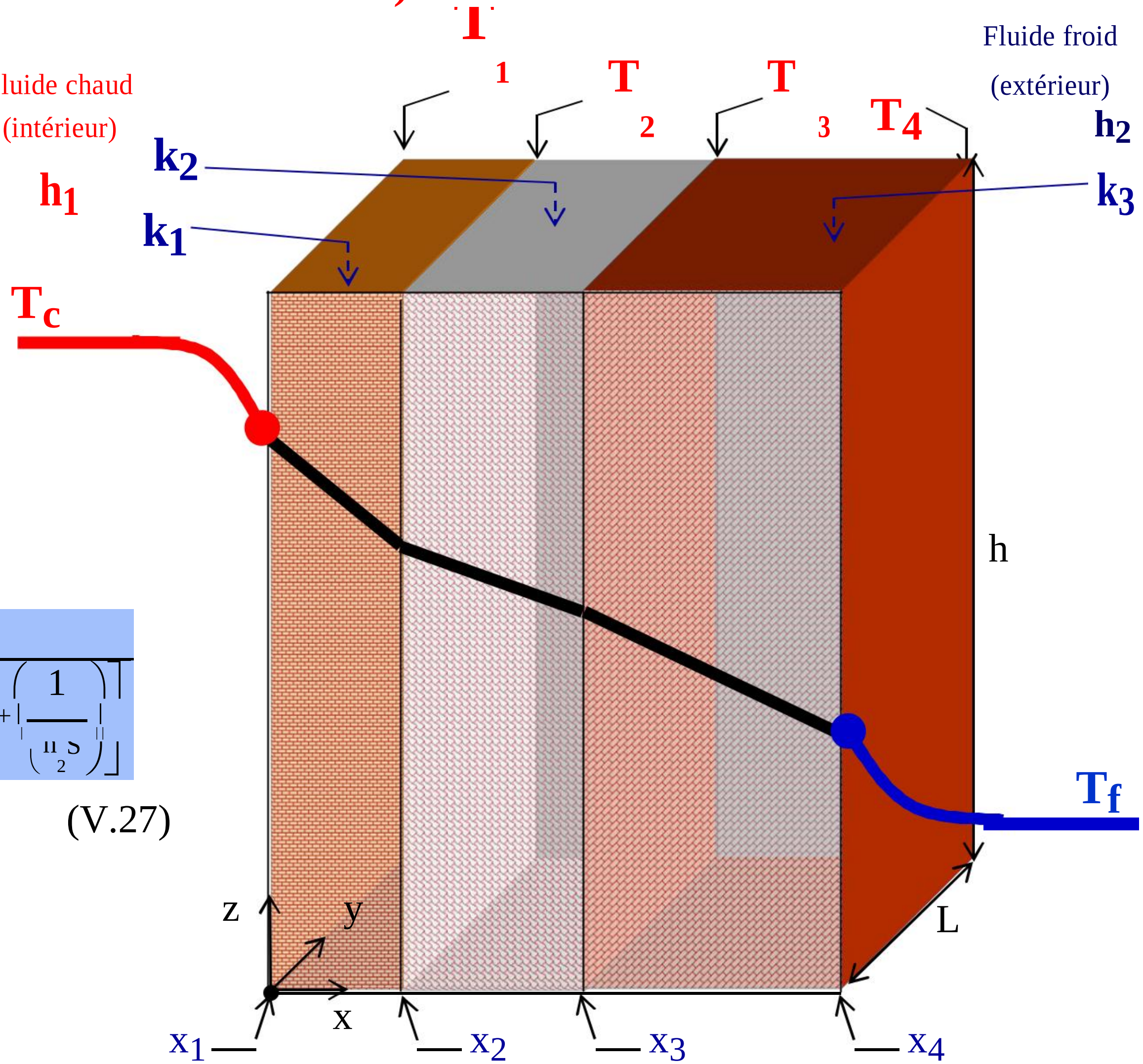
R_{d2} : est la résistance de transfert par conduction dans le dépôt d'encrassement côté fluide froid.

$R_2 = (1/h_2S_2)$ est la résistance de transfert par convection côté fluide froid.

Le débit de chaleur transféré faisant apparaître une surface de transfert , il est nécessaire de rapporter les résistances de transfert énumérées précédemment à une même surface de référence. Dans les échangeurs industriels, quel que soit leur type, ***le fluide chaud (1) circule à l'intérieur du tube, alors que le fluide froid (2) circule à l'extérieur***, sauf cas très particulier. Généralement, ***on convient de choisir en référence la surface extérieure du tube chaud***.

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{1}{U S_2}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\left(\dfrac{1}{h_1 S_1}\right) + \Re_{d1} + \Re_p + \Re_{d2} + \left(\dfrac{1}{h_2 S_2}\right)\right]} \qquad (V.26)$$

a. Mur composite multicouches (avec résistance du convection)



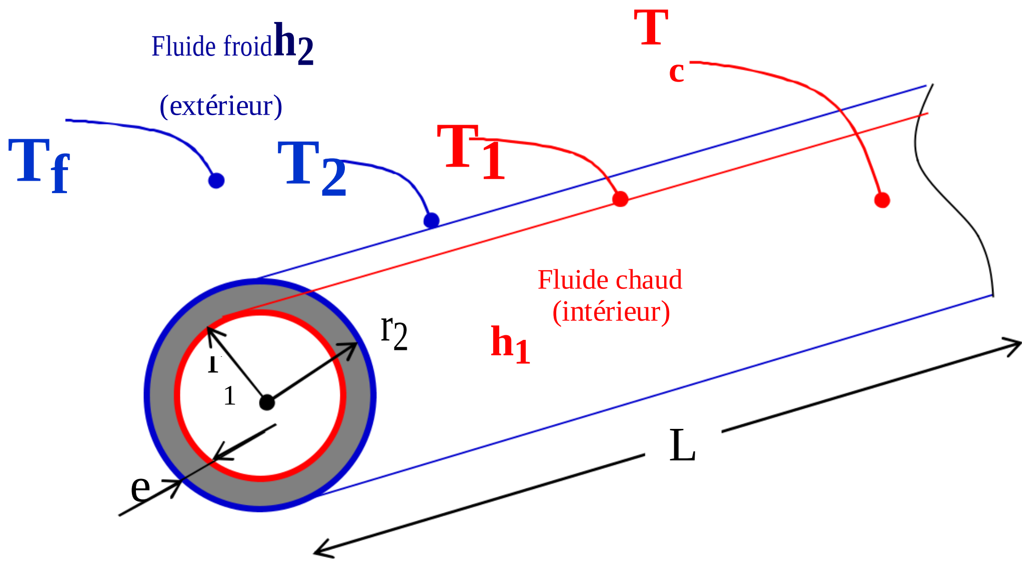
$$q = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\dfrac{1}{U\,S_m}\right]} = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\left(\dfrac{1}{h_1 S}\right) + \left(\dfrac{e_1}{k_1 S}\right) + \left(\dfrac{e_2}{k_2 S}\right) + \left(\dfrac{e_3}{k_3 S}\right) + \left(\dfrac{1}{h_2 S}\right)\right]} \qquad \text{(V.27)}$$

b. Tube cylindrique (avec résistance du convection)

$$q = \frac{(T_c - T_1)}{\dfrac{1}{h_1\, s_1}} = \frac{(T_c - T_1)}{\dfrac{1}{h_1\, 2\,\pi\, L\, r_1}} = \frac{(T_c - T_1)}{\Re_{cv_1}}$$

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\,\pi\, k\, L}\right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\Re_{cd}}$$

$$q = \frac{(T_2 - T_f)}{\dfrac{1}{h_2\, s_2}} = \frac{(T_2 - T_f)}{\dfrac{1}{h_2\, 2\,\pi\, L\, r_2}} = \frac{(T_2 - T_f)}{\Re_{cv\,2}}$$



b. Tube cylindrique (avec résistance du convection)

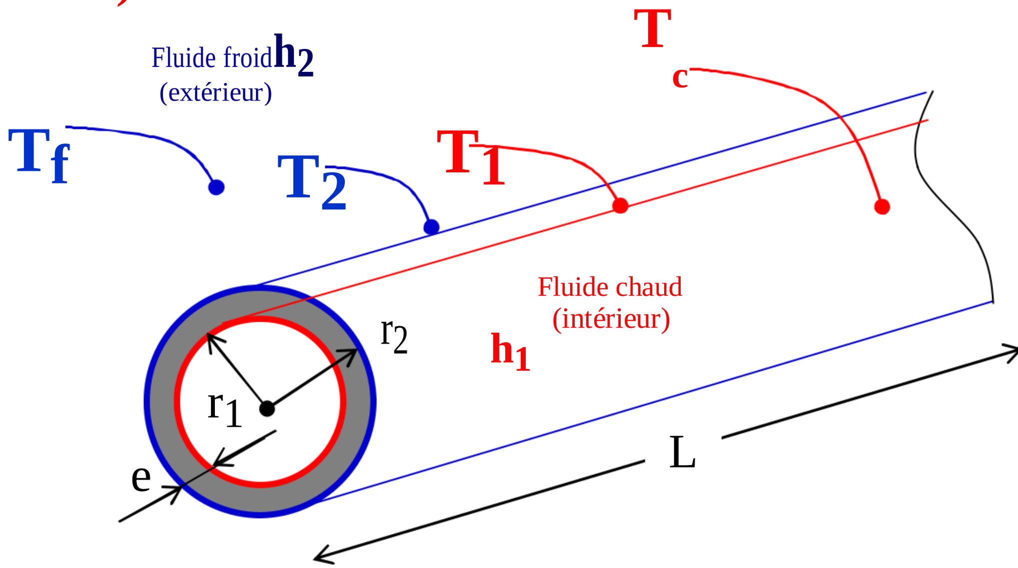
$$(T_c - T_1) = \frac{q}{h_1\, 2\,\pi\, L\, r_1}$$

$\oplus$

$$(T_1 - T_2) = q \left[\frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\,\pi\, k\, L} \right]$$

$\oplus$

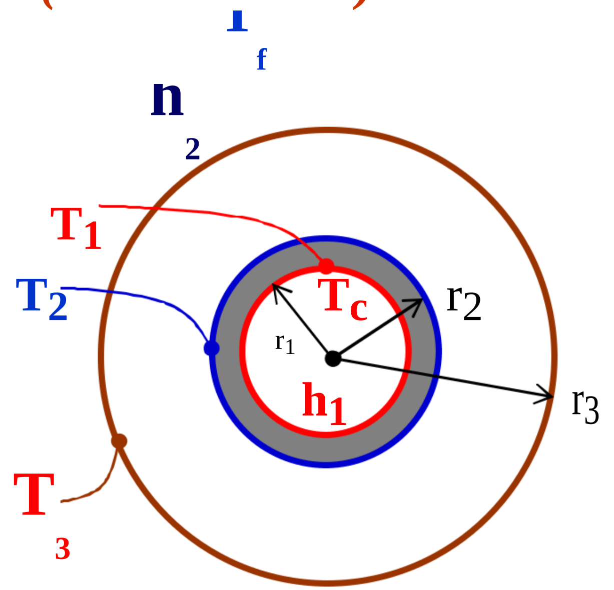
$$(T_2 - T_f) = \frac{q}{h_2\, 2\,\pi\, L\, r_2}$$



$$q = \frac{(T_c - T_f)}{\dfrac{1}{h_1\, 2\,\pi\, L\, r_1} + \left[\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\,\pi\, k\, L}\right] + \dfrac{1}{h_2\, 2\,\pi\, L\, r_2}} = \frac{(T_c - T_f)}{\Re_{cv1} + \Re_{cd} + \Re_{cv_1}} = \frac{(T_c - T_f)}{\sum_i (\Re_k)_i} = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\dfrac{1}{U\, S_2}\right]}$$

$$\frac{1}{U} = \frac{r_2}{h_1\, r_1} + \left[\frac{r_2 \ln(r_2 / r_1)}{k}\right] + \frac{1}{h_2}$$

b. Conduction à travers deux tubes concentriques accolés (multicouches)



Considérons 2 tubes concentriques de longueur L en contact thermique parfait (voir figure)

T_1 est la température de la face interne du tube 1 de conductivité thermique k_1 .

T_3 est la température de la face externe du tube 2 de conductivité thermique k_2 .

T_2 est la température de l'interface entre les 2 tubes

T_c la température de fluide chaud qui s'écoule à l'intérieur du tub interne.

T_c la température de fluide chaud qui s'écoule à l'intérieur du tub externe.

$$q = \frac{(T_c - T_f)}{\frac{1}{h_1 2\pi L r_1} + \left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L}\right] + \left[\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L}\right] + \frac{1}{h_2 2\pi L r_3}} = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\frac{1}{U S_2}\right]}$$

$$q = \frac{\Delta T}{\sum_i (\Re_k)_i}$$

$$\frac{1}{U_2} = \frac{r_3}{h_1 r_1} + \left[\frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{k_1}\right] + \left[\frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2}\right] + \frac{1}{h_2}$$

Exemple d'application 3 :

L'intérieur du tube du rapport de rayon (r_1/r_2) (étudié dans le cas du conduction), entartré sur une épaisseur de « e » circule la vapeur d'eau à T_c.
Coefficient d'échange thermique entre la vapeur d'eau et la paroi interne est hi = 5 W/ m^2 °C.
Conductivité thermique du tartre k_c
la température de l'aire à l'extérieur est T_f (Coefficient d'échange thermique d'air est he)

Calculer :

a) le flux thermique correspondant (pour une longueur de 1 m).

b) Coefficient d'échange globale.

Données :

T_c =125°C , k_c= 2,2 W.m^{-1} °C^{-1} ; k = 46 W.m^{-1} °C^{-1} ; r_1/r_2 = 20/27 ; e =2 mm, hi = 5 W/ m^2 °C, he = 4 W/ m^2 °C. T_f = 116 °C

Correction : exemple d'application 4 :

a) le flux thermique correspondant (pour une longueur de 1 m).

$$q = \frac{(T_c - T_f)}{\dfrac{1}{h_i\, 2\pi L\, (r_1 - e)} + \left[\dfrac{\ln\left(r_1/(r_1 - e)\right)}{2\pi k_c L} + \dfrac{\ln\left(r_2/r_1\right)}{2\pi k_t L}\right] + \dfrac{1}{h_e\, 2\pi L\, r_2}}$$

$$q = \frac{125 - 116}{\dfrac{1}{5.\,2\pi\, 1 (20-2) 10^{-3}} + \left[\dfrac{\ln\left(20/(20-2)\right)}{2\pi\, 2{,}2\; 1} + \dfrac{\ln(27/20)}{2\pi 46.1}\right] + \dfrac{1}{4.\,2\pi\, 1.\, 27 10^{-3}}} = 2{,}78 W$$

b) Coefficient d'échange globale.

$$q = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\dfrac{1}{U S_2}\right]} \longrightarrow U = \frac{q}{(T_c - T_f)\, S_2} = \frac{q}{(T_c - T_f)\, 2\pi L\, r_2}$$

Correction : exemple d'application 4 :

b) Coefficient d'échange globale.

$$q = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\dfrac{1}{U\,S_2}\right]} \longrightarrow U = \frac{q}{(T_c - T_f)\,S_2} = \frac{q}{(T_c - T_f)\,2\,\pi\,L\,r_2}$$

$$U = \frac{2{,}78}{(125 - 118)\,2\,\pi\,1.\,27\,10^{-3}} = 5{,}88\ W / m^2.°C$$

Correction : exemple d'application 4 :

c) Calculer T_1 et T_2.

$$q = \frac{(T_c - T_1)}{\frac{1}{h_i\, 2\,\pi\, L\,(r_1 - e)}} \longrightarrow T_1 = T_c - \frac{q}{h_i\, 2\,\pi\, L\,(r_1 - e)}$$

$$T_1 = 125 - \frac{2{,}78}{52\,\pi\, 1(20-2)10^{-3}} = 120{,}08°C$$

$$q = \frac{(T_2 - T_f)}{\frac{1}{h_e\, 2\,\pi\, L\, r_2}}$$

$$T_2 = T_f + \frac{q}{h_e\, 2\,\pi\, L\, r_2}$$