Mme BELAID
Née ABDELHAMID Lilia

Programme F112

Table des matières

Chapitre I Rappels mathématiques

I-1 / Calcul vectoriel

I-1- a / Notions sur les vecteurs

L'utilisation des vecteurs facilite les travaux sur certaines grandeurs physiques.

Un vecteur est un segment de droite AB, ayant une origine A et une extrémité B. Il est défini par :

- Son origine ou point d'application
- Sa direction : la direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la droite AB.
- Son sens : le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est de A vers B.
- Sa norme ou son module : c'est la mesure de la longueur du segment [AB].

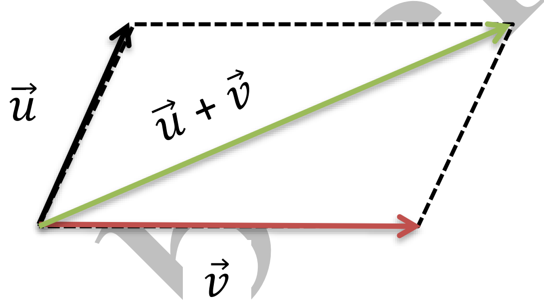
I-1- b / Opérations sur les vecteurs

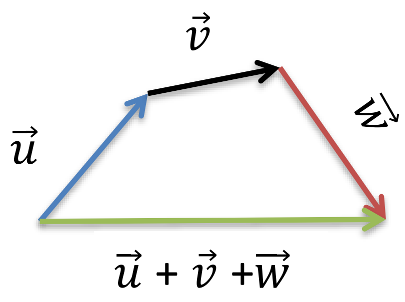
- <u>Somme de vecteurs</u>.

La somme de vecteurs est un vecteur dont on obtient la représentation en construisant un contour polygonal dont les côtés sont respectivement égaux aux vecteurs de la somme.

<u>Exemple</u>

$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$; $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

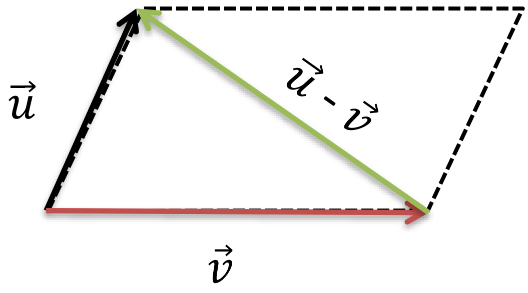




- <u>Différence de vecteurs</u>.

La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la somme du premier vecteur et l'opposé du second.

$\vec{a} = \vec{u} - \vec{v} \quad = \quad \vec{u} + (- \vec{v})$



- ## Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un scalaire α est un vecteur noté $\alpha\vec{u}$.

$$(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

Notons que deux vecteurs sont colinéaires (parallèle) si et seulement s'ils sont proportionnels c'est-à-dire s'il existe un nombre α tel que : $\vec{u} = \alpha\vec{v}$

- ## Composantes et norme d'un vecteur

Soit A et B deux points dans un repère cartésien de coordonnées respectifs A(x_a , y_a) et B(x_b ,y_b) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $< x_b - x_a\ ,\ y_b - y_a >$.

Le vecteur s'écrit $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a)\,\vec{\imath} + (y_b - y_a)\,\vec{\jmath} = a\,\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

La norme ou le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- ## Vecteur unitaire

Le vecteur unitaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le rapport de ce vecteur sur le module de celui-ci.

$$\vec{\mu} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

I-2 / Produit scalaire

I-2–a/ Expression géométrique du Produit scalaire

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs faisant un angle géométrique θ, on appelle produit scalaire et on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ le nombre réel (scalaire) :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|\,.\cos\theta$$

C'est le produit du module de $\|\vec{v}\|$ par la projection de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$ ($\|\vec{u}\|\cos\theta$).

I-2–b/ Expression analytique du Produit scalaire

Si $\vec{u} = <X, Y, Z>$ et $\vec{v} = <X', Y', Z'>$ alors l'expression analytique du produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'$$

En effet,

$$(X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}).(X'\vec{\imath} + Y'\vec{\jmath} + Z'\vec{k}) = XX' + YY' + ZZ'$$

Puisque :

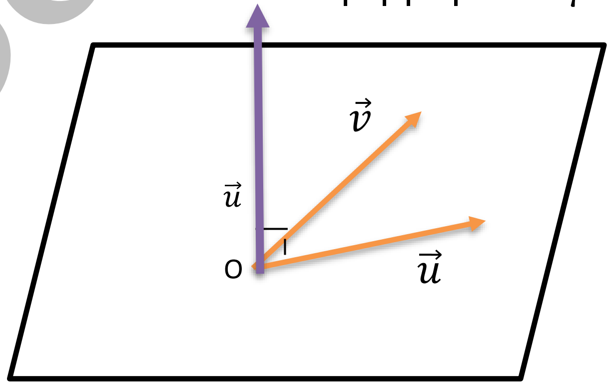
$\vec{\imath}\,.\,\vec{\imath} = \vec{\jmath}\,.\,\vec{\jmath} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$ et que $\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\,.\,\vec{k} = \vec{k}\,.\,\vec{\imath} = \vec{k}\,.\,\vec{\jmath} = \vec{\imath}\,.\,\vec{k} = 0$

I-3 / Produit vectoriel

I-3–a/ Expression géométrique du Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et defini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta.\vec{\mu}$$



I-3–b/ Expression analytique du Produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}) \wedge (X'\vec{\imath} + Y'\vec{\jmath} + Z'\vec{k}) = (yz' - zy')\vec{\imath} - (xz' - x'z)\vec{\jmath} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

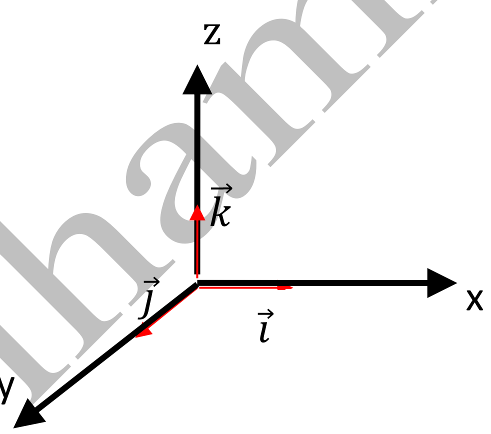
Car $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$ et que $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$; $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$; $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

$$\begin{array}{ccc} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{array} = (yz' - zy')\vec{\imath} - (xz' - x'z)\vec{\jmath} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

I-4 / Systèmes usuels de coordonnées

I-4- a / Coordonnées Cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$



I-4-b / Coordonnées polaires

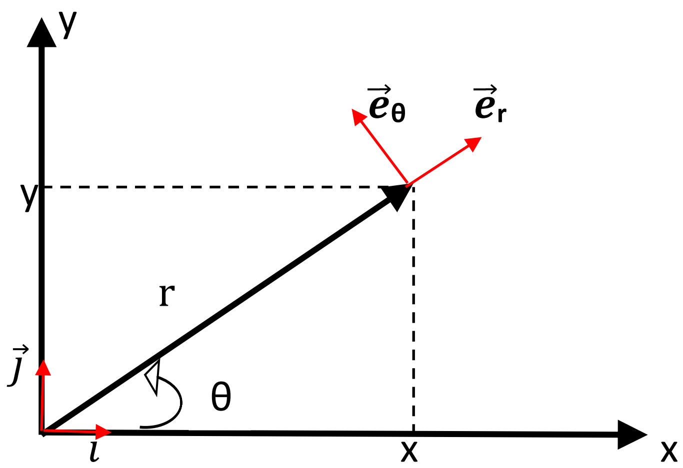
Les coordonnées polaires d'un point M sont (r, θ) ,la base polaire est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Le vecteur position du point M dans la base polaire est donnée par : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

Les coordonnées polaires sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$x = r\cos\theta$ $\qquad$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\theta$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$



avec

$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

I-4-c / Coordonnées cylindriques

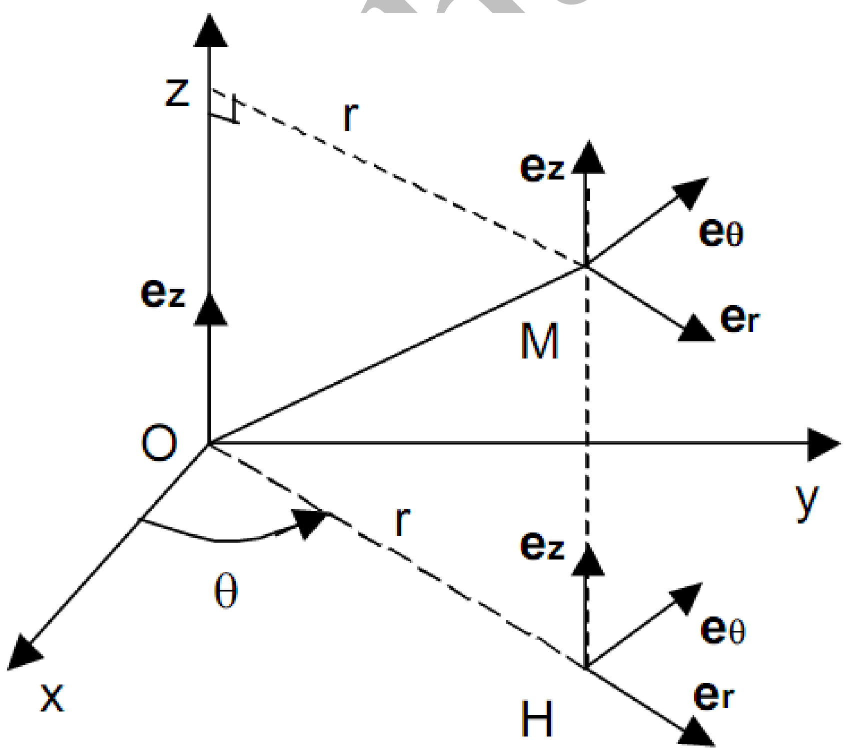
Les coordonnées cylindriques d'un point M sont (r, θ, z), la base polaire est ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$).

Les coordonnées cylindriques sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$x = r\cos\theta$ $\quad\quad$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\theta$ $\quad\quad$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$z = z$ $\quad\quad$ $z = z$



Le vecteur position en coordonnées cylindriques est donné par

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

I-4-d / Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques d'un point M sont (r ,θ, φ), la base sphérique est ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$,$\vec{e}_\varphi$).

Les coordonnées sphériques sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$x = OH \cos\varphi$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = OH \sin\varphi$ $\qquad$ avec $OH = r \sin\theta$ $\qquad$ $y = r \sin\varphi \sin\theta$

$z = r \cos\theta$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $z = r \cos\theta$

Le vecteur position du point M dans la base sphérique est donné par : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$