Mme BELAID
Née ABDELHAMID Lilia

Chapitre IV Dynamique

IV -1/ Introduction

La cinématique du point a permis de décrire le mouvement d'un objet, sans s'occuper des causes, c'est la dynamique qui permet de relier le mouvement à ses causes.

Newton a établi les lois fondamentales de la dynamique, notamment une loi (la $2^{ème}$) reliant force et accélération, en d'autres termes elle permet de relier des grandeurs dynamiques (forces) à une grandeur cinématique (l'accélération).

IV -2/ systèmes étudiés et actions mécaniques

Un point matériel M représente un système (un ou plusieurs objets physiques) dont la position peut être décrite par ces coordonnées et caractérisé par sa masse notée m.

Les actions mécaniques (les forces) sont les causes du mouvement, elles sont représentées par le vecteur force $\vec{F}$

L'unité de la force est le newton $1N = 1\ Kg.m.s^{-2}$

Le vecteur force est caractérisé par sa direction, son sens sa norme et son point d'application.

IV -3/ différents types de forces

Il existe deux grandes catégories de forces :

- Forces d'interaction à distance ex : forces de gravitation le poids, force électromagnétiques……
- Forces de contact ex : forces de frottement, tension d'un fil, réaction d'un support ……

IV -3 -a/ poids d'un point matériel

Un point matériel M de masse m est soumis à son poids $\vec{p}$, force verticale et dirigée vers le bas , de norme

$$p = mg$$

poids en Newton $\longleftarrow$ $\vec{P} = m\,\vec{g}$ $\longrightarrow$ champ de pesanteur $g = 9{,}81 m/s^2$

$\downarrow$ La masse en Kg

Le poids d'un corps, de masse m, correspond principalement à la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la terre sur lui

IV -3 -b/ forces de contact

Les différentes forces de contact sont :

- Action du support sur lequel repose le système $\vec{R}$, ou réaction normale.
- Force de frottement solide entre le système et le support.
- Force de frottement visqueux avec un fluide (gaz ou liquide).
- Force de rappel d'un ressort
- Tension d'un fil

IV -4/ lois de Newton

Les principes ou lois ne se démontrent pas, c'est à partir de l'observation d'un grand nombre d'expériences que le physicien est amené à énoncer une loi qui restera valide tant qu'une autre expérience ne la remettra pas en question.

La mécanique classique est construite à partir de trois lois que Newton a énoncées.

Un système matériel est un ensemble de points matériels.

Un système matériel est isolé, s'il n'existe aucune action venant de l'extérieur et exerçant sur le système exemple : un cosmonaute dans l'espace

Un système matériel est pseudo-isolé si les actions extérieures qui agissent sur le système se compensent (tout se passe comme si le système était isolé),ainsi sur terre , un système ne peut être rigoureusement isolé puisqu'il subit obligatoirement l'action de son poids.

IV -4-a/ vecteur quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement noté $\vec{P}$ d'un point matériel de masse m se déplaçant avec une vitesse $\vec{V}$

Dans un référentiel donné est défini par :

$$\vec{P} = m \vec{V}$$

IV –5/ 1ère loi de Newton (Principe d'inertie)

Dans un référentiel galiléen (R) , un système mécanique isolé ou pseudo-isolé est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

$$\vec{V} = C^{ste} \Rightarrow \vec{P} = m\ \vec{V} = C^{ste} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad ;\ V = C^{ste} = V_0 \text{ ou } V = 0 \text{ (objet au repos)}$$

Ce principe conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé ou pseudo-isolé :

$$\vec{P} = \vec{P}' \Rightarrow m_1\vec{V}_1 = m_2\ \vec{V}_2 = m_3\ \vec{V}_3$$

De cette première loi découle le principe fondamental de la statique : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Si un système est en équilibre, alors $\vec{V} = 0$ et $\vec{a} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$

Cependant l'inverse n'est pas vrai : si $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$ le système est soit au repos ,soit en mouvement rectiligne uniforme ($\vec{V} = C^{ste}$).

IV –6/ 2ème loi de Newton (Principe fondamentale de la dynamique)

Dès qu'un système subit des actions provenant de l'extérieur, il n'est plus isolé, les conséquences sont une modification du mouvement qui se manifeste par une variation du vecteur quantité de mouvement qui ne se conserve plus.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\ \vec{V}_G) = m\frac{d\vec{V}G}{dt} = m\vec{a}_G$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

IV –7/ 3ème loi de Newton (Principe des actions réciproques)

Soient deux systèmes S_1 et S_2 en interaction(à distance ou par contact)

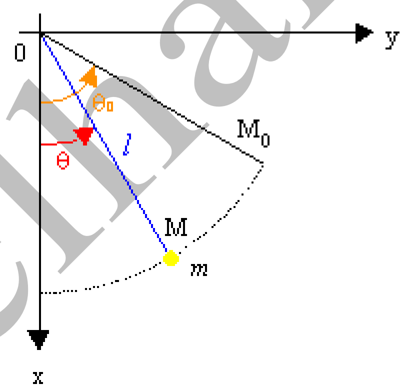
A chaque fois qu'un système S_1 exerce une action (une force) $\vec{F}_{1\text{-}2}$ sur un système S_2 , alors le système S_2

exerce une action (une force) $\vec{F}_{2\text{-}1}$ sur le système S_1.

Ces forces sont égales et opposées : $\vec{F}_{1\text{-}2} = - \vec{F}_{2\text{-}1}$

IV –8/ Application (le pendule simple)

Un pendule simple est constitué d'une masse m considérée ponctuelle fixée à l'extrémité libre d'un fil de longueur l, on écarte la masse de sa position initiale d'un angle θ0 , et on la lâche sans vitesse initiale, on néglige les frottements de l'air.



En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminons l'équation horaire du mouvement du pendule.

D'après le PFD on a : $$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

Mme BELAID
Née ABDELHAMID Lilia

En projetant sur la base polaire on aura :

$mg\cos\theta - T = m\, a\, \vec{e}_r$

$-mg\sin\theta = m\, a\, \vec{e}_\theta$

On sait qu'en coordonnées polaires , l'accélération est donnée pour un mouvement circulaire (r = Cste)

$$\vec{a}(t) = -\, r\,\dot{\theta}^2\ \vec{e}_r + r\,\ddot{\theta}\ \vec{e}_\theta$$

Avec r = l ,

En combinant les deux équations on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Le pendule est un oscillateur harmonique si l'angle θ est suffisamment petit pour que $\sin\theta \approx \theta$, l'équation différentielle obtenue pourra alors être linéarisée .

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On pose $\sqrt{\frac{g}{l}} = W$ (pulsation)

$$\ddot{\theta} + W^2\theta = 0$$

L'équation du mouvement du pendule est alors une équation différentielle du second ordre sans second membre, elle admet pour solution :

$\theta(t) = A_1 \cos wt + A_2 \sin wt$

Les oscillations sont sinusoïdales (oscillateur harmonique non amorti) car on a négligé les frottements de l'air.

Les constantes A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales.

à t=0 , $\theta(t) = \theta_0 = A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 \Rightarrow A_1 = \theta_0$

à t =0 , $V(t) = V_0 = 0 = -A_1 \sin 0 + A_2 \cos 0 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos wt$$

la période est donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

IV –9/ Moment d'une force

Il est possible de donner une autre forme au principe fondamentale de la dynamique en introduisant une nouvelle grandeur cinématique intéressante, lorsqu'un système (point matériel) tourne autour d'un point ou un axe « le moment d'une force ».

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O ou un axe Δ exprime l'aptitude de cette force à produire une rotation autour du point O ou de l'axe Δ passant par O

L'expression du moment d'une force est donné par le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et la force $\vec{F}$

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = OM.F.\sin\alpha\,\vec{\mu}$$

L'unité du moment d'une force est le N.m

Un corps est en équilibre et au repos si

-la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle

-La somme des moments des forces appliquées est nulle

-la vitesse du corps est nulle

IV –9/ Moment cinétique

On appelle moment cinétique noté $\vec{L}_0$ ou $\vec{L}_\Delta$ du point M en rotation autour d'un point O ou autour de l'axe Δ passant par O , le moment de sa quantité de mouvement.

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$$

L'unité du moment cinétique Kg.m^{-2}.S^{-1}

En coordonnées polaires on obtient :

$$\vec{L}_0 = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\ \vec{e}_r + r\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L}_0 = r\vec{e}_r \wedge m\,\dot{r}\ \vec{e}_r + r\vec{e}_r \wedge m\,r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_0 = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{K}$$

$$\vec{L}_0 = J\,\vec{w}$$

On appelle la quantité $J = mr^2$ le moment d'inertie.

Il décrit la répartition de la masse dans l'espace.

IV –9/ Théorème du moment cinétique (TMC)

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_0) = \sum \vec{M}0\,(\vec{F})$$

Démonstration

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$$

On dérive cette expression par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_0) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}m\vec{V}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_0) = 0 + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{M}0\,(\vec{F})$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{L}_0) = \sum \vec{M}0\,(\vec{F})}$$

IV-10/Analogie entre grandeurs de translation et de rotation

Il est intéressant, de mettre en évidence, une analogie entre grandeur de translation et grandeurs de rotation ,en effet on peut substituer à l'association force--- principe fondamental de la dynamique (PFD) , la relation moment de force ----- théorème du moment cinétique (TMC), le moment cinétique joue pour la rotation un rôle équivalent à la quantité de mouvement pour la translation.

Vitesse linéaire	$\vec{V}$	Vitesse angulaire	$\omega = \dot{\theta}$
Accélération	$\vec{a}$	Accélération angulaire	$\ddot{\theta} = \dot{\omega}$
Force	$\vec{F}$	Moment de force	$\vec{M}0\ (\vec{F})$
Masse(inertie)	M	Moment d'inertie	$J = mr^2$
Quantité de mouvement	$\vec{P} = m\ \vec{V}$	Moment cinétique	$\vec{L}0 = J\,\vec{w}$
Energie Cinétique	$Ec = \frac{1}{2} m\ V2$	Energie Cinétique	$Ec = \frac{1}{2} J\ w$
PFD	$\sum \vec{F}\ ext = m\vec{a}G$	TMC	$\frac{d}{dt}\ (\vec{L}0) = \sum \vec{M}0\ (\vec{F})$

Chapitre V Travail, Puissance & énergie

V-1 / Généralités

L'énergie est une grandeur fondamentale de la physique, qui permet de résoudre certains problèmes de la mécanique du point par une équation scalaire que l'on pouvait résoudre aussi par la forme vectorielle du principe fondamental de la dynamique.

V-2 / Travail d'une force

Une force qui modifie le mouvement d'un objet qui était initialement au repos, ou provoque sa déformation travaille, le travail d'une force exprime donc l'effort qu'il faut fournir pour déplacer un objet. On le note W du mot anglais work.

On appelle travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pendant la durée dt, le produit scalaire de cette force par le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ noté aussi $\overrightarrow{dOM}$

$$\delta w = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

On peut l'exprimer autrement, comme la vitesse est la dérivée du déplacement par rapport au temps,

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} \qquad \text{donc} \qquad d\vec{l} = \vec{V}\, dt$$

$$\delta w = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{V}\, .dt$$

le travail de la force $\vec{F}$ le long d'un trajet AB ou (courbe C) est égale à la somme des travaux élémentaires.

$$W(\vec{F})_{A\_B} = \sum \delta w = \int_A^B \delta w$$

$$W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

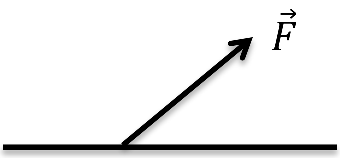
V-2-a / Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne

Le travail de la force sur le déplacement AB est donné par le produit scalaire de cette force par le déplacement AB.

$$W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F} \, . \, \overrightarrow{dl} = \vec{F} \int_A^B \overrightarrow{dl}$$

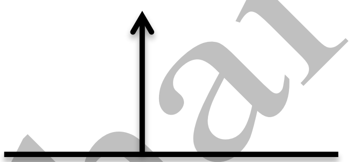
$$W(\vec{F})_{A\_B} = \vec{F} . \overrightarrow{AB} = F . AB . \cos \alpha$$

Unite : N.m , 1N.m = 1 joule



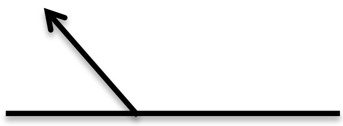
Le travail est moteur

W > 0 ($\alpha < \frac{\pi}{2}$)



le travail est nul

W = 0 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)



le travail est résistant

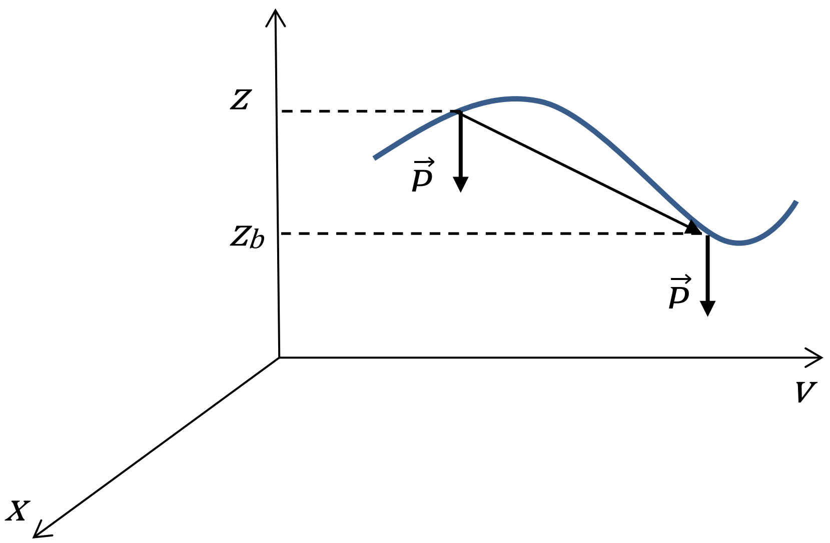
W < 0 ($\alpha > \frac{\pi}{2}$)

V-2-a / **Travail d'une force constante sur un déplacement quelconque.**

Prenons comme exemple de travail d'une force constante , le travail du poids.

Soit un point matériel M de masse m ,il est donc soumis à son poids $\vec{P}$ qui est une force constante durant le temps .

Le travail du poids sur un déplacement AB est donc le produit scalaire du poids $\vec{P} = m\vec{g}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$.



$$W(\vec{P})_{A\_B} = \int_A^B \vec{P}\,.\,\vec{dl} = \vec{P}\int_A^B \vec{dl} = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = P.\,AB\,.\cos\alpha$$

$$\vec{P}.\overrightarrow{AB} = (0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - mg\vec{k}\,).\,(x_b - x_a)\vec{\imath} + (y_b - y_a)\vec{\jmath} + (z_b - z_a)\vec{k}$$

$$\vec{P}.\overrightarrow{AB} = -mg\,(z_b - z_a) = -m\,g\,\Delta h$$

La différence d'altitude entre le point A et B est donné par :

$\Delta h = z_b - z_a$ En remarquant que $AB\,.\cos\alpha = z_a - z_b$

On peut écrire que

$$\vec{P}.\overrightarrow{AB} = -mg\,(z_b - z_a) = -m\,g\,\Delta h = mg\,.\,AB\,.\cos\alpha$$

On constate que le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais dépend seulement de la différence d'altitude entre le point de départ A et le point d'arrivée B, on dit que le poids est une force conservative.

Si le point M monte , $\Delta h > 0$, le travail est négatif , on dit qu'il est résistant.

Si le point M descend , $\Delta h < 0$, le travail est positif , on dit qu'il est moteur.

V-2-b / Travail d'une force variable sur un déplacement quelconque.

Prenons comme exemple de force variable la force élastique $\vec{T}$, ou la tension d'un ressort qui varie avec l'état d'étirement Δx de celui-ci. $\vec{T} = -K\,\Delta x\,\vec{\imath}$

Le travail de la tension du ressort d'une position A à une position B est donné par :

$$W(\vec{T})_{A\_B} = \int_A^B \vec{T}\,.\,\vec{dl} = \int_A^B \vec{T}\,.\,\overrightarrow{dx} = \int_A^B -Kx.dx \;= -K\int_{Xa}^{Xb} x.dx$$

$$W(\vec{T})_{A\_B} = \frac{1}{2}Kx_a^2 - \frac{1}{2}Kx_b^2$$

On Remarque que le travail de la tension du ressort ne dépend pas aussi du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et la position finale. La tension du ressort est une force conservative .

Forces conservatives $\vec{F}^{C}$

Toutes les forces dont le travail ne dépend suivi exemples :

- Travail du poids
- Travail de la tension d'un ressort
- Travail d'une force constante en norme et en direction.

Forces non conservatives $\vec{F}^{NC}$

Toutes les forces dont le travail dépend du chemin suivi, exemples :

Forces de frottement

V-3 / Puissance d'une force

La puissance d'une force nous renseigne sur la rapidité avec laquelle le travail de cette force est effectué.

Un même travail, peut donc être réalisé plus ou moins rapidement.

La puissance moyenne est donnée par le rapport du travail effectué pendant une durée Δt :

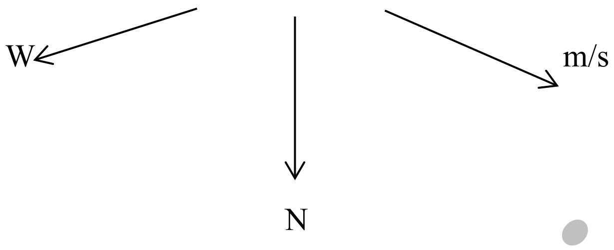
$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

L'unité de la puissance est le watt, il correspond à un travail de 1 joule effectué en 1 seconde.

La puissance instantanée correspond au travail effectué par la force pendant la durée élémentaire dt .

$$P(t) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}\,.\,\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\ \vec{V}$$

$$P(t) = \vec{F}.\ \vec{V}$$



On peut établir une relation entre le travail et la puissance d'une force :

$$W(\vec{F})_{A\_B} = \sum \delta w = \int_A^B \delta w$$

$$W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F}\ .\ \vec{dl}$$

$$W(\vec{F})_{A\_B} == \int_{ta}^{tb} \vec{F}.\ \vec{V}\,.\,dt = \int_{ta}^{tb} P\,dt$$

V-4 / Energie

L'énergie est une grandeur scalaire qui permet de résoudre de nombreux problèmes de dynamique , on distingue trois types d'énergie :

V-4-a / Energie cinétique

C'est l'énergie liée au mouvement et donc à la vitesse $\vec{V}$

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,V^2$$

Le théorème de l'énergie cinétique est donné par :

$$\frac{1}{2}\,m\,V_b^2 - \frac{1}{2}\,m\,V_a^2 = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c = \sum WA\_B\,(\vec{F}_{ext})$$

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de toutes ces forces (conservatives et non conservatives).

Démonstration :

$$W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F} \,.\, \overrightarrow{dl}$$

D'où :
$$\sum W(\vec{F})_{A\_B} = \sum \int_A^B \vec{F} \,.\, \overrightarrow{dl} = \int_A^B \sum \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

or

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{V}}{dt}$$

et
$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt}$$
donc
$$\overrightarrow{dl} = \vec{V}\,dt$$

$$\sum W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B m\,\frac{d\vec{V}}{dt} \,.\, \overrightarrow{dl} = \int_A^B m\,\frac{\vec{dl}}{dt} \,.\, \overrightarrow{dV} = \int_A^B \vec{V}.\,d\vec{v}$$

$$\sum W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{V}.\,d\vec{v} = \frac{1}{2}\,m\,V_b^2 - \frac{1}{2}\,m\,V_a^2 = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

V-4-b / Energie potentielle

L'énergie potentielle est l'énergie liée à la position .

Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial (A) et final (B) , ce travail peut s'exprimer à partir d'une fonction Ep appellée énergie potentielle.

Le théorème de l'énergie potentielle est donné par :

$$E_p(B) - E_p(A) = \Delta E_p = -\sum W_{A\_B}(\vec{F}_c)$$

La variation de l'énergie potentielle entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail des forces conservatives entre ces deux points.

- Energie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgh = -\,W_{A\text{-}B}(\vec{P})$
- Energie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta l = -\,W_{A\text{-}B}(\vec{T})$

V-4-c / Energie mécanique

L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle de ce système.

$$E_{mec} = E_c + E_p$$

Le théorème de l'énergie mécanique est donné par :

$$\Delta E = E_{mec}(B) - E_{mec}(A) = \sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC})$$

La variation de l'énergie mécanique entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces non conservatives entre ces deux points.

Démonstration :

Le théorème de l'énergie cinétique (TEC) nous donne : $\Delta E_c = \sum W_{A\_B}(\vec{F}_{ext})$

$$\Delta E_c = \sum W_{A\_B}(\vec{F}_C) + \sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC}) = E_c(B) - E_c(A)$$

Or $$E_p(B) - E_p(A) = \Delta E_p = -\sum W_{A\_B}(\vec{F}_c)$$

Donc $$E_p(A) - E_p(B) = \sum W_{A\_B}(\vec{F}_c)$$

D'où: $$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + \sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC})$$

$$\sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC}) = E_c(B) - E_c(A) + E_p(B) - E_p(A)$$

$$\sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC}) = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E$$

Si le système est conservatif ou isolé, alors il Ya conservation de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E = 0$$

Donc on peut dire que si un système est conservatif c'est-à-dire que s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas, alors la variation de l'énergie mécanique de ce système est nulle.