Chapitre II Cinématique du point matériel

II-1 / Généralités

Le mot cinématique provient du mot grec « Cinéma » qui veut dire mouvement.

La cinématique est l'étude du mouvement d'un solide, en déterminant sa position, sa vitesse et son accélération.

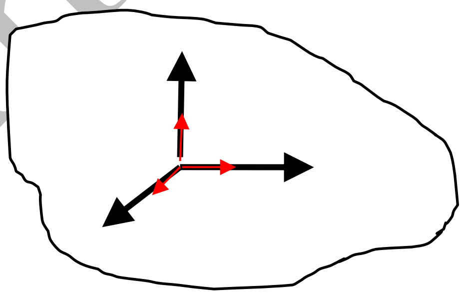
La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie et décrit le mouvement d'un objet considéré comme infiniment petit qu'on appelle point matériel en le note M, sa masse est m.

II-2 / Repérage d'un mobile

L'ensemble des points décrit par le point M au cours du temps est appelé trajectoire.

Sur sa trajectoire le point M a une vitesse $\vec{V}$ et une accélération $\vec{a}$.

Pour étudier le mouvement d'un point en se donne un repère et pour cela on définit un référentiel ou un espace



Le point M peut être un avion par exemple et donc en peut repérer la position de notre avion à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

II-2–a/ Vecteur position

Le vecteur position est donné dans les différents systèmes de coordonnées par :

- Coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- Coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$
- Coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_r$

La relation mathématique qui relie les coordonnées indépendamment du temps est appelée l'équation de la trajectoire.

Exemple : y = f(x) ou bien r = f(Θ)

$$\left.\begin{array}{l} X = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{array}\right\}$$ Equation paramétrique ou Equation horaire

II-2–b/ Vecteur vitesse

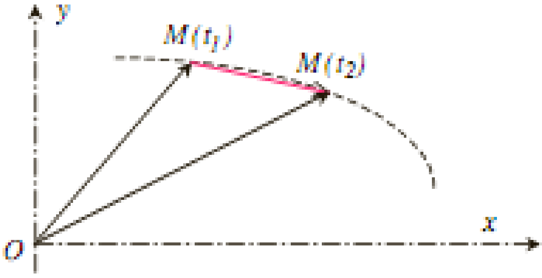
La vitesse est une grandeur vectorielle qui donne des informations sur l'évolution de la position d'un point par rapport au temps, son unité m / s.

Elle doit exprimer la direction instantanée du déplacement du point, le sens du déplacement ainsi que l'amplitude de la variation de ce déplacement.

La vitesse est une grandeur vectorielle dont la direction est tangente à la trajectoire.

- Vitesse moyenne : c'est la distance parcourue par unité de temps

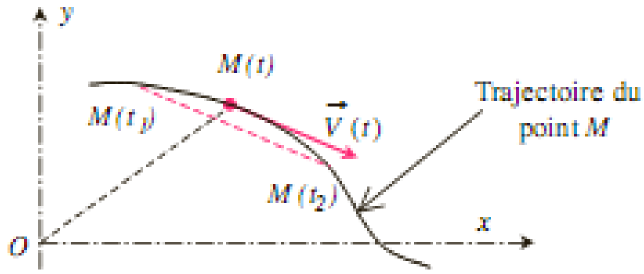
$$\vec{V}m = \frac{\overrightarrow{M1M2}}{t2-t1} = \frac{\overrightarrow{OM2} - \overrightarrow{OM1}}{\Delta t}$$



- **Vitesse instantanée** : c'est la vitesse à un instant t, elle peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position M_1 du point à l'instant t et la position M_2 de ce même point à l'instant (t + Δt) ou Δt représente une durée très faible.

La vitesse moyenne d'un point M tend vers la vitesse instantanée à la date t lorsque Δt tend vers 0.

$$\vec{V}(t) = lim \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$



Lorsque M_2 tend vers M_1, la corde $M_1 M_2$ tend vers la tangente à la trajectoire au point M d'où le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

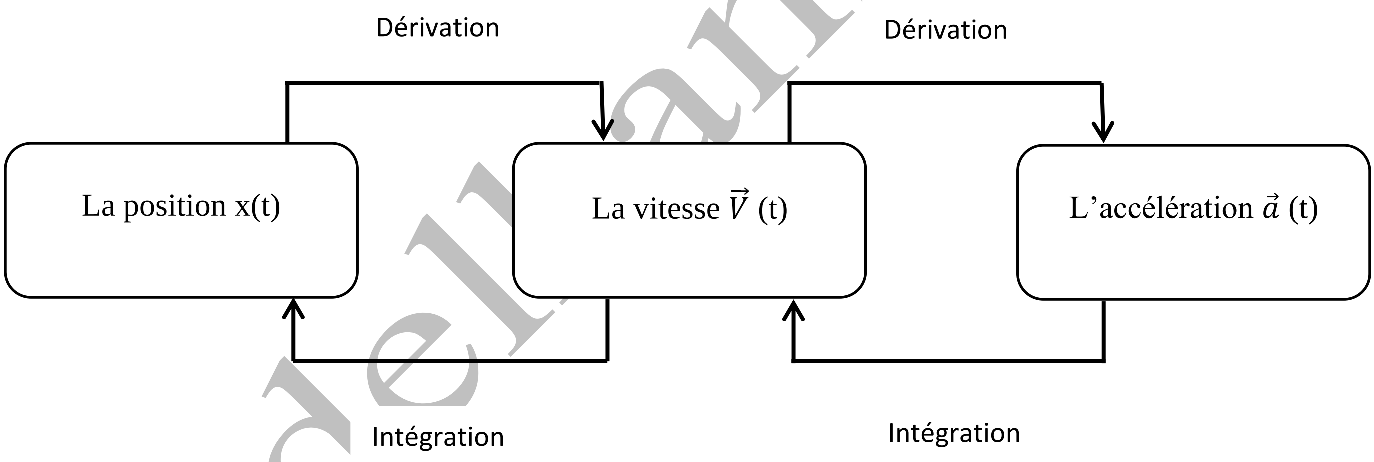
II-2–c/ Vecteur accélération

Tout comme le vecteur vitesse nous renseigne sur la variation du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération nous renseigne sur les variations du vecteur vitesse par rapport au temps.

Le vecteur accélération représente donc la dérivée première par rap

port au temps du vecteur vitesse ou bien la dérivée seconde du vecteur position.

Les trois équations horaires, qui sont la position x(t), la vitesse $\vec{V}$ (t) et l'accélération $\vec{a}$ (t), sont des fonctions au sens mathématique qui peuvent se déduire les unes des autres par dérivation et intégration.



II-3/Expression du Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

Le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

La base cartésienne étant une base fixe au cours du temps, ses vecteurs unitaires sont donc indépendants du temps et leur dérivée par rapport au temps est nulle.

$$\vec{V}(t) = V_X\vec{\imath} + V_Y\vec{J} + V_Z\vec{K} \qquad \vec{V}(t) = \dot{X}\,\vec{\imath} + \dot{Y}\,\vec{J} + \dot{Z}\,\vec{K}$$

II-4/Expression du Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k})$$

La base cartésienne étant une base fixe au cours du temps, ses vecteurs unitaires sont donc indépendants du temps et leur dérivée par rapport au temps est nulle.

$$\vec{a}(t) = a_X\vec{\imath} + a_Y\vec{J} + a_Z\vec{K} \qquad \vec{a}(t) = \ddot{X}\,\vec{\imath} + \ddot{Y}\,\vec{J} + \ddot{Z}\,\vec{K}$$

II-5/Expression du Vecteur vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$ avec en Coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\;\vec{e}_r + r\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

Rappel mathématique

Règle de dérivation d'une fonction composée :

Si on a f =f(y) et y= f (x) alors on a :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Dans notre cas y est l'angle θ et x représente le temps .

Donc : $\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \frac{d}{d\theta}\vec{e}_r \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\frac{d}{d\theta}\vec{e}_r$ Avec :

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad ; \quad \frac{d\vec{e}r}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{e}_\Theta$$

$$\vec{e}_\Theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \quad ; \quad \frac{d\vec{e}\Theta}{d\theta} = = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\,\vec{e}_r$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta \quad \text{et} \quad : \quad \frac{d}{dt}\vec{e}_\Theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r}$$

Et donc l'expression de la vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(\,r\vec{e}_r\,) = \dot{r}\;\vec{e}_r + r\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

Devient :

$$\boxed{\vec{V}(t) = \dot{r}\;\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta}$$

II-6/Expression du Vecteur accélération en coordonnées polaires

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\;\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta) = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\frac{d}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\Theta + r\,\dot{\theta}\,\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = (\,\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\,)\,\vec{e}_r + (\,2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\,)\,\vec{e}_\theta}$$

II-7/Expression du Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ avec en Coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}r + z\,\vec{e}z$

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(\,r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z\,) = \dot{r}\;\vec{e}_r + r\frac{d}{dt}\vec{e}_r + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

$\vec{e}_z$ étant indépendant du temps $(\vec{k})$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \dot{r}\ \vec{e}_r + r\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta + \dot{z}\ \vec{e}_z}$$

II-8/Expression du Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\ \vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta + \dot{z}\ \vec{e}_z)$$

$$= \ddot{r}\ \vec{e}_r + \dot{r}\ \frac{d}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\ \dot{\theta}\ \vec{e}_\theta + r\ \ddot{\theta}\ \vec{e}_\theta + r\ \dot{\theta}\ \frac{d}{dt}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\ \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\ \vec{e}_r + (2\dot{r}\ \dot{\theta} + r\ \ddot{\theta})\ \vec{e}_\theta + \ddot{z}\ \vec{e}_z}$$

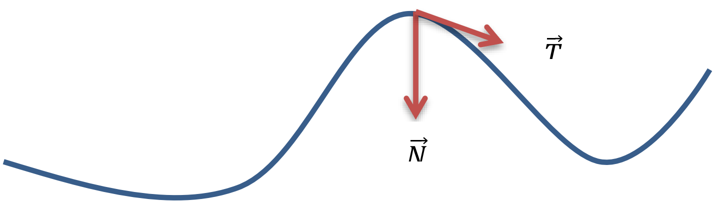
II-9/Repère de Frenet

C'est un repère mobile orthonormé (M , $\vec{T}$, $\vec{N}$)

$\vec{T}$ étant un vecteur unitaire tangent à la trajectoire

$\vec{N}$ étant un vecteur unitaire normal à la trajectoire, dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire.

En tout point de la trajectoire , on peut définir un cercle(localement une portion de courbe, ressemble toujours, plus ou moins à un cercle) , de rayon δ , rayon de courbure de la trajectoire.



$\vec{V} = V\ \vec{u}_T$	$\vec{V}$ est tangent à la trajectoire
$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv}{dt}\ \vec{u}_T + \frac{V^2}{R}\ \vec{u}_N$	$\vec{a}$ est dirigé vers l'intérieur de la trajectoire

$a_T = \frac{dv}{dt}$ est la valeur de l'accélération tangentielle, Elle peut être positive, négative ou nulle.

$a_N = V^2/R$ est la valeur de l'accélération normale, Elle peut être positive ou nulle.

R est le rayon de courbure de la trajectoire.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \qquad \text{d'où} \qquad a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

Chapitre III Etude des mouvements usuels

III-1/ Mouvement rectiligne

La trajectoire du point M est une droite dans le référentiel $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Il est évident alors de repérer le point M, sur cette droite confondue, par exemple, avec l'axe OX des coordonnées cartésiennes. Il n'y a alors qu'une équation horaire x(t) et une seule composante pour les vecteurs vitesse et accélération.

$\vec{V}(t) = V_x\,\vec{\imath}$ $\qquad$ $\vec{V}(t) = \dot{X}\,\vec{\imath}$ $\qquad$ $\vec{a}(t) = a_x\,\vec{\imath}$ $\qquad$ $\vec{a}(t) = \ddot{X}\,\vec{\imath}$

III-2/ Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Un mouvement rectiligne est uniforme si la vitesse est une constante $V = \dot{X} = C^{ste}$

$\vec{V}(t) = V_0\,\vec{\imath} = C^{ste}$ on a donc $V_0 = C^{ste} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V_0\,dt \Rightarrow \int dx = \int V0\,dt$

$\Rightarrow x = V_0\,t + x_0$ $\qquad$ équation horaire du MRU

La constante x_0 est une constante d'intégration qui s'obtient à partir des conditions initiales.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_0\,\vec{\imath}) = 0$$

MRU

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = V_0\,t + x_0 \\ \vec{V}(t) = V_0\,\vec{\imath} = C^{ste} \\ \vec{a}(t) = 0 \end{array}}$$

III-3/ Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)

Le mouvement rectiligne est uniformément varié si l'accélération est une constante $\vec{a}$ = C^{ste} = $a_0\,\vec{\imath}$ selon OX

$$\vec{a} = C^{ste} = a_0\,\vec{\imath} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = a_0\,\vec{\imath}\ dt \Rightarrow \int d\vec{v} = \int a0\,\vec{\imath}\ dt \Rightarrow \vec{v} = (a_0\,t + v_0)\vec{\imath}$$

Pour obtenir l'équation horaire x(t) , il faut intégrer $\vec{v}$

$$x(t) = \int (a0\ t\ +\ v0)\vec{\imath}$$

$X(t) = \frac{1}{2}\,a_0\,t^2 + v_0\,t + x_0$ équation horaire du MRUV

MRUV

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{2}\,a_0\,t^2 + V_0\,t + x_0 \\ \vec{V}(t) = (\,a_0\,t + v_0\,)\,\vec{\imath} \\ \vec{a}(t) = a_0\,\vec{\imath} = C^{ste} \end{array}}$$

Le mouvement rectiligne uniformément varié est soit accéléré ou décéléré (retardé).

Le mouvement est uniformément accéléré si le produit scalaire $\vec{v}\,.\,\vec{a} > 0$ est positif

Le mouvement est uniformément décéléré si le produit scalaire $\vec{v}\,.\,\vec{a} < 0$ est négatif

Le signe de l'accélération $\vec{a}$ ne suffit pas.

Il est possible d'obtenir une relation entre position, vitesse et accélération indépendamment du temps.

On a :

$$V = a_0\,t + v_0 \Rightarrow t = (v - v_0\,) / a_0$$

En remplaçant t par son expression dans l'équation horaire x(t) on obtient :

$$2\,a_0\,(x - x_0\,) = v^2 - v_0^2$$

III-4/ Mouvement circulaire

Dans un mouvement circulaire la trajectoire du point M est un cercle de centre O , et de rayon r, il est logique de choisir l'origine du repère le centre O du cercle, le système de coordonnés polaires est bien adapté pour ce type de mouvement.

Avec r = constante et $\theta = f(t)$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = r\frac{d}{dt}\vec{e}_r = r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = -\ r\,\dot{\theta}^2\ \vec{e}_r + r\,\ddot{\theta}\ \vec{e}_\theta$$

III-4/ Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse angulaire est une constante $w = \dot{\theta} = Cste$,

On obtient alors les équations du mouvement circulaire uniforme :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{V}(t) = r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \quad = r\,w\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -\,r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$$

On peut écrire aussi :

$$w = \dot{\theta} = C^{ste} \Rightarrow \theta = wt + \vartheta_0 = \dot{\theta}t + \vartheta_0$$

la vitesse angulaire w étant constante ,la composante tangentielle du vecteur accélération est nulle , il ne reste que la composante normale, c'est elle qui « fait tourner » c'est-à-dire que la composante normale nous renseigne sur les variations de la direction du vecteur vitesse et non de sa norme , qui est fixe , donc même si le mouvement est uniforme (V et w sont constants) cette accélération existe nécessairement.

III-5/ Mouvement circulaire uniformément varié

Le mouvement circulaire est uniformément varié si l'accélération angulaire est une constante $\ddot{\theta}$ = Cste

On obtient alors : $\dot{\theta} = \ddot{\theta}_0 t + \dot{\theta}_0$

$$\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

Le mouvement circulaire uniformément varié est soit accéléré ou retardé.

MCUA si le produit scalaire $\dot{\theta} . \ddot{\theta} > 0$

MCUR si le produit scalaire $\dot{\theta} . \ddot{\theta} < 0$

III-5/ Mouvement rectiligne sinusoïdal

L'équation horaire est une fonction sinusoïdale du temps du type :

$X = Xm \cos(wt + \varphi)$

C'est le mouvement, par exemple d'une masse accrochée à un ressort, ou du pendule simple sans frottements de l'air.

La quantité w s'appelle la pulsation (unité rd/s)

Xm représente l'amplitude maximale du mouvement

$\Phi = wt + \varphi$ est la phase à l'instant t

ϕ représente la phase à l'origine

La période T est l'intervalle de temps constant qui sépare deux passages consécutifs du mobile au même point.

Un mouvement est donc dit périodique, lorsqu'il se répète à l'identique, à des intervalles de temps identiques (la période).

De l'instant t à t + T la phase a augmenté de 2π et conserve sa valeur c'est-à-dire :

$$W[(t+T)+\phi] = Wt + \phi + 2\pi \quad \Rightarrow \quad WT = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{W} \text{ (secondes)}$$

On appelle oscillation le mouvement effectué par le mobile en une période

La fréquence f est le nombre d'oscillations en une seconde $f = \frac{1}{T}$ (hertz)

On en déduit que : $W = 2\pi f$

De l'équation horaire du mouvement on tire l'équation de la vitesse et de l'accélération :

$X = Xm \cos(wt + \varphi)$

$V(t) = \frac{dx}{dt} = - Xmw \sin(wt + \varphi)$

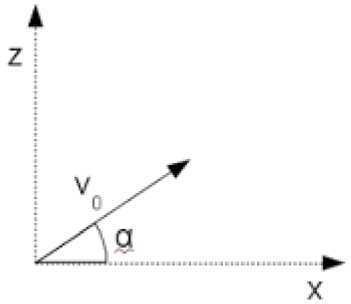
$a(t) = \frac{dv}{dt} = + Xmw^2 \cos(wt + \varphi)$

III-7 / Mouvement parabolique

Exemple : tir balistique sans frottements de l'air.

On considère un projectile lancé à l'instant t=0 avec une vitesse V_0 qui forme un angle alpha avec l'horizontale. On néglige les frottements de l'air.

L'équation de la trajectoire est une parabole.



MRU selon OX : $x(t) = v_0 t + x_0$

MRUV selon OY : $y(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + y_0$