Programme F212

Table des matières

Préambule

Cet ouvrage est un manuel de physique, il est destiné principalement aux étudiants de première année LMD ST (sciences & technologies), il recouvre ainsi la totalité du programme de physique 2 de la première année.

Il est le fruit d'une longue expérience et de nombreuses années d'enseignement de la physique.

Chaque chapitre propose un cours exposé de façon détaillée, et des applications en rapport avec le cours, qui permettront aux étudiants de concrétiser leurs connaissances.

Le chapitre un est une approche approfondie de l'électrostatique.

Le chapitre deux est une initiation à la magnétostatique.

Le chapitre trois est un aperçu sur l'électrocinétique.

Ce cours est assuré deux séances par semaine, d'une heure et demi chacune, suivi de deux séances de travaux dirigés (TD) par semaine, d'une heure et demi chacune.

Chapitre I Electrostatique

I-1 Rappel mathématique

L'analyse vectorielle est une branche des mathématiques qui étudie les champs de scalaires et de vecteurs.

L'importance de l'analyse vectorielle provient de son utilisation intensive en physique et dans les sciences de l'ingénieur, C'est de ce point de vue que nous la présenterons.

Dans ce cadre, un champ de vecteurs associe à chaque point de l'espace un vecteur, tandis qu'un champ scalaire y associe un réel.

Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre. Cela signifie qu'ils ne font intervenir que des dérivées partielles (ou différentielles) premières des champs, à la différence, par exemple, du laplacien qui fait intervenir des dérivées partielles du second ordre.

On les rencontre, en particulier, en électrostatique et en magnétisme.

L'opérateur nabla ∇ est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On écrit aussi $\vec{\nabla}$ pour souligner que formellement, l'opérateur nabla a les caractéristiques d'un vecteur. Il ne contient certes pas de valeurs scalaires, mais on va utiliser ses éléments constitutifs très exactement comme on aurait utilisé les valeurs scalaires composant un vecteur.

La notation nabla fournit un moyen commode pour exprimer les opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes ; dans d'autres systèmes de coordonnées, elle est encore utilisable au prix de précautions supplémentaires.

I-1-1 Notion sur le gradient

Le gradient est un opérateur qui s'applique à un champ de scalaires et décrit un champ de vecteurs qui représente la variation de la valeur du champ scalaire dans l'espace

En coordonnées cartésiennes le gradient est donné par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Simplement appliqué à un champ scalaire f(x,y,z), l'opérateur nabla donne le gradient du champ. Le gradient obtenu est lui un champ vectoriel.

I-1-2 Notion sur la divergence

Le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel U (défini par ses trois composantes) donne la divergence de ce champ vectoriel. La divergence obtenue est un champ scalaire.

$$\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Où $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ désigne le champ de vecteurs auquel est appliqué l'opérateur divergence. La divergence peut être vue, formellement, comme le produit scalaire de l'opérateur nabla par le vecteur du champ auquel elle est appliquée, ce qui justifie la notation $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

I-1-3 Notions sur le rotationnel

Le rotationnel transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs. Plus difficile à se représenter aussi précisément que le gradient et la divergence, il exprime la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point.

En coordonnées cartésiennes, on peut définir le rotationnel par la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z \\ \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x \\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \end{pmatrix}$$

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ désigne le champ de vecteurs auquel est appliqué l'opérateur rotationnel. L'analogie formelle avec le produit vectoriel justifie la notation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

Cela peut aussi s'écrire, par abus de notation (c'est aussi une astuce technique), à l'aide d'un déterminant :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

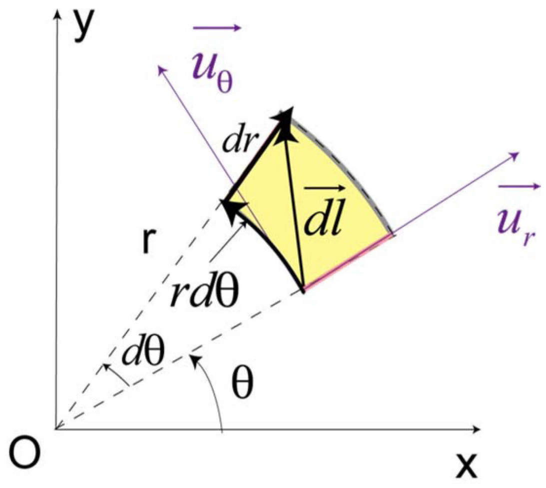
I-1-4 Eléments de longueur et de volume dans les différents Systèmes de cordonnées

L'élément de longueur est donné dans le système de coordonnées cartésiennes par

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$$

Dans les coordonnées polaires, l'élément de longueur devient

$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta}$



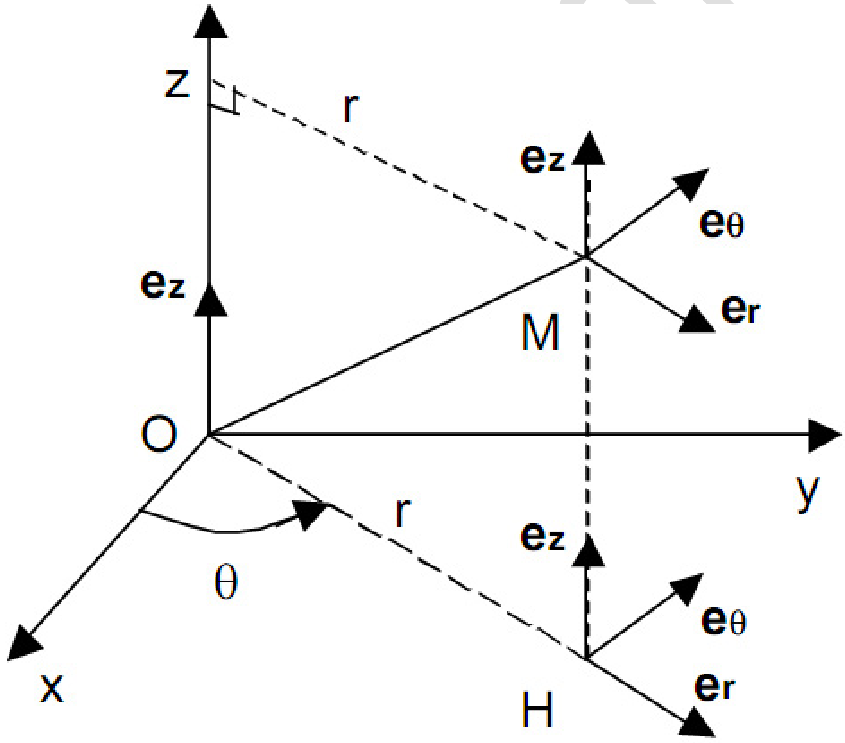
Ou bien si Les coordonnées polaires du point M (r, θ) sont dans la base polaire ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$).les notations diffèrent d'un ouvrage à l'autre.

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

Le vecteur position du point M dans la base polaire est :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}r$$

Les coordonnées cylindriques du point M (r ,θ, z),dans la base polaire ($\vec{e}r$, $\vec{e}_\theta$,$\vec{e}z$).



Le vecteur position en coordonnées cylindriques est donné par

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}r + z\,\vec{e}z$$

Dans les coordonnées cylindriques, l'élément de longueur devient

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$$

L'élément de volume en coordonnées cylindriques peut se déduire facilement

$$dV = (dr)(rd\theta)(dz) = rdrd\theta dz$$

Les coordonnées sphériques du point M sont (ρ ,θ, ϕ), dans la base sphérique ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$,$\vec{e}_\phi$).

Le vecteur position du point M dans la base sphérique est donné par : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}r$

On en déduit le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + rsin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

On en déduit le volume élémentaire $dV = (dr)(rd\theta)(rsin\theta d\varphi) = r^2 drd\theta sin\theta d\varphi$

I-2 Champ et force électrostatique

En physique, on désigne par champ électrique un champ crée par des particules électriquement chargées, cette notion fut introduite par Michael Faraday, elle permet d'expliquer comment deux objets peuvent interagir à distance, sans que rien ne les relie, à la fois la loi de la gravitation universelle de Newton et la loi de Coulomb en électrostatique, impliquent une telle interaction à distance, il n'y a pas de fil qui relie la terre au soleil, celui-ci exerce son attraction à distance. De même, deux charges électriques s'attirent ou se repoussent dans le vide sans que rien ne les relie.

Soit une charge q_1 qui de part sa présence crée un champ électrostatique en tout point de l'espace, l'interaction de ce champ avec une charge q_2 crée une force électrostatique entre ces deux charges.

Dans le cas de charges fixes dans le référentiel d'étude, le champ électrique est appelé champ électrostatique.si les charges sont en mouvement, il faut ajouter un champ électrique induit dû au déplacement des charges pour obtenir le champ total (champ électromagnétique).

I-2-1 notions de charges électriques

La matière est constituée de particules élémentaires (atome, proton et neutron), caractérisées par leur masse et leurs charges.

Expériences :

1/Prenons une boule très légère en polystyrène par exemple, recouverte de métal fin. Approchons ensuite une tige de verre ou d'ambre préalablement frotté avec un tissu, on observe une attraction entre le verre et la boule et une répulsion entre l'ambre et la boule : on fait ainsi apparaitre deux types d'électricité, charges positives et charges négatives.

2/ prenons maintenant deux boules en polystyrène électrisée l'une par du verre frotté et l'autre par de l'ambre frotté on voit que les deux boules s'attirent, ensuite les deux boules sont électrisées par du verre frotté, on remarque que les deux boules se repoussent.

Les charges de mêmes signes se repoussent et les charges de signes opposés s'attirent.

I-2-2 Interaction élémentaire : Loi de Coulomb

Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures (à l'aide d'une balance de torsion) qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2.

La force est radiale, c'est-à-dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges.

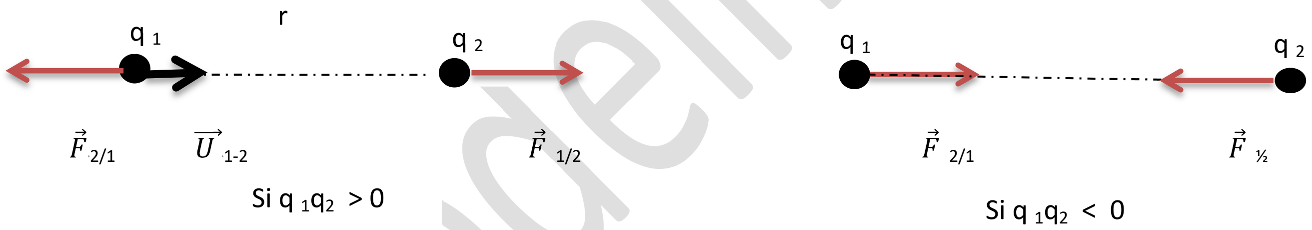
Elle est proportionnelle au produit des charges

Enfin, elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

L'expression mathématique de la force de Coulomb exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 et traduisant les propriétés ci-dessus est la suivante :

$$\vec{F}_{1\text{-}2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1\text{-}2} \qquad (1.1)$$

- Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles et dans le vide.
- Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
- Cette force obéit au principe d'Action et de Réaction de la mécanique classique.
- Cette force est attractive si les charges sont de signe opposé, répulsive sinon.



La loi de Coulomb peut s'écrire aussi :

$$\vec{F}_{1\text{-}2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1\text{-}2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = K\, q_1 q_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

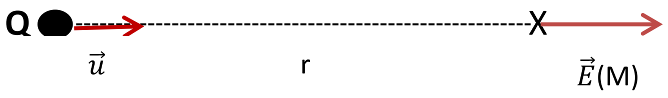
$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ \mathrm{N.m^2/C^2}\ \ (\mathrm{SI})$$

Où K est la constante de Coulomb et ε_0 est la permittivité du vide.

I -2- 3 Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle

Le champ électrostatique traduit en tout point M la modification des propriétés de l'espace due à la présence d'une charge source Q.

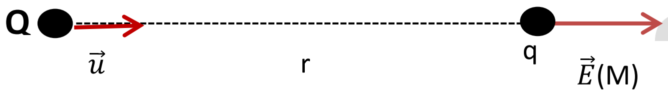
$$\vec{E}\,(M) = K\frac{Q}{r^2}\vec{u} \qquad (1.2)$$



L'unité du champ dans le système international (SI) est : V/m ou N /C

La force électrostatique s'exerçant sur une charge cible q placée au point M est :

$$\vec{F} = q\,\vec{E} \tag{1.3}$$



I-2-4 Champ électrostatique crée par un ensemble de charges :

I-2-4-a Cas d'une distribution discrète de charges

Principe de superposition : le champ électrostatique en un point de l'espace est égale à la somme des champs électrostatiques créés par les différentes charges en ce point.

$$\vec{E}_{\text{tot}}(M) = \sum_{i=1}^{n} K\frac{Qi}{r2}\,\vec{u}\,i \rightarrow M \tag{1.4}$$

De même pour la force électrostatique créé par une distribution discrète de charge (ensemble de charges ponctuelles), la résultante des forces est donné par le principe de superposition :

$$\vec{F}_{\text{tot}}(M) = \sum_{i=1}^{n} K\frac{QiQM}{r2}\,\vec{u}\,i \rightarrow M \tag{1.5}$$

I-2-4-b Cas d'une distribution continue de charges

Dès que le nombre de charges augmente, le calcul du champ total devient trop complexe et donc pour calculer le champ en un point M de l'espace dû à une distribution continue de charge on divise l'espace en petits morceaux contenant chacun une charge élémentaire dq distant de r du point M et la somme de ces champs élémentaires sera remplacée par une intégrale :

$$\vec{E} = \sum \vec{E}(M) = \int_{0}^{\text{distr}} \frac{\text{Kdq}}{\text{r2}}\,\vec{u} \tag{1.6}$$

On distingue trois cas de distribution continue :

- Une distribution linéaire ou linéique de charge
- Une distribution surfacique de charge
- Une distribution volumique de charge

Exemples de surfaces chargées :

Cellules = membranes chargées en surface

Axones des cellules nerveuses = cylindres chargés

Distribution linéique de charge

Soit un fil de longueur l portant une charge Q uniformément répartie sur sa longueur.

Soit un élément de longueur dl qui porte une charge élémentaire dq on a alors :

$dq = \lambda\, dl$ où λ représente la densité linéaire ou linéique de charge (C/m)

On peut écrire que la charge totale portée par le fil est :

$$Q = \int \lambda dl \qquad \text{et que} \qquad \vec{E} = \int \overrightarrow{dE}(M)$$

$$\vec{E} = \int k\, \frac{dq}{r2}\, \vec{u} \qquad \vec{E} = \int k\, \frac{\lambda dl}{r2}\, \vec{u}$$

Distribution surfacique de charge

De la même manière on peut considérer une distribution surfacique de charge, Soit une surface S portant une charge Q uniformément répartie sur toute sa surface avec une densité surfacique de charge б (C/m^2).Soit ds un élément de surface qui porte une charge élémentaire dq, on peut écrire :

$$Q = \iint 6ds \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = \int \overrightarrow{dE}(M)$$

$$\vec{E}(M) = \iint K \frac{dq}{r^2}\, \vec{u} \qquad \vec{E}(M) = \iint K \frac{6ds}{r^2}\, \vec{u}$$

Distribution volumique de charge

De la même manière on peut considérer une distribution volumique de charge, Soit un volume V portant une charge Q uniformément répartie sur tout son volume avec une densité volumique de charge ρ (C/m^3). Soit dv un élément de volume qui porte une charge élémentaire dq, on peut écrire :

$$Q = \iiint \rho dV$$

$$\vec{E}(M) = \iiint \overrightarrow{dE}(M) = \iiint K \frac{dq}{r^2}\vec{u} = \iiint K \frac{\rho dV}{r^2}\vec{u}$$

I-3 Potentiel électrostatique

La charge électrique d'une distribution peut être décrite par un vecteur : le champ électrique ou par une grandeur scalaire : le potentiel électrique V. On peut donc caractériser la perturbation du milieu due à la présence de charges électriques par une fonction scalaire : le potentiel V.

Le potentiel est lié au travail accompli pour transporter une charge d'un point à l'autre. Le champ électrostatique n'existe que s'il y a une variation de potentiel entre deux points.

Champ électrique = variation du potentiel dans l'espace.

La relation entre le potentiel et le champ électrique est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \qquad (1.7)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \qquad dV = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} \qquad V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}$$

I-3-1 Potentiel électrostatique crée par une charge ponctuelle

V est donc un scalaire algébrique, s'exprime en volts.

Le potentiel en un point M situé à une distance r de la charge q est donné par :

$$V = K\,\frac{q}{r} \qquad (1.8)$$

Rappel de l'élément de longueur en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

Et donc le produit scalaire donne en coordonnées polaires et de même pour les coordonnées sphériques :

$$\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = K\frac{q}{r2}\vec{u}_r\cdot(dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta) = K\frac{q}{r2}dr$$

et donc

$$V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\int K\frac{q}{r2}dr = K\,\frac{q}{r} + c^{ste}$$

On suppose que le potentiel à l'infini est nul $V(\infty) = 0$

Alors $0 + C^{ste} = 0$ donc $C^{ste} = 0$

$$V = K\,\frac{q}{r}$$

I-3-2 potentiel électrostatique crée par un ensemble de charges

I-3-2-a Cas d'une distribution discrète de charges

Les potentiels s'ajoutent pour une distribution de charges ponctuelles, on applique alors le théorème de superposition.

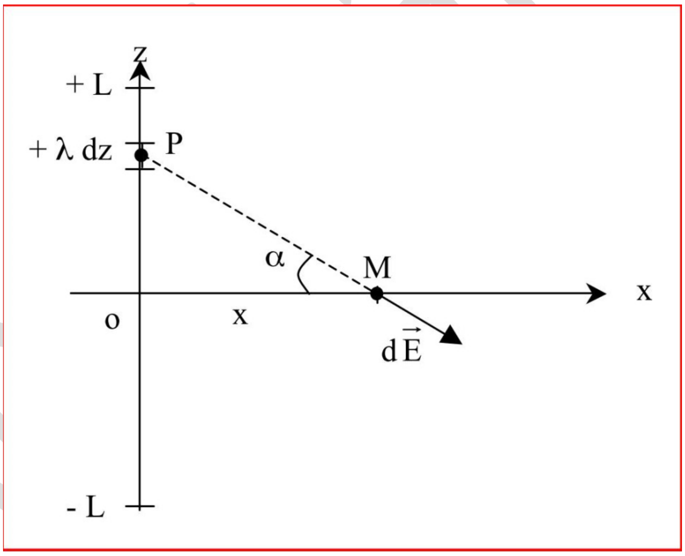
$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i \tag{1.9}$$

I-3-2-b Cas d'une distribution continue de charges

- Distribution linéaire de charge : $V(M) = \int K \frac{dq}{r} = \int K \frac{\lambda dl}{r}$
- Distribution surfacique de charge : $V(M) = \int K \frac{dq}{r} = \iint K \frac{6ds}{r}$
- Distribution volumique de charge: $V(M) = \int K \frac{dq}{r} = \iiint K \frac{\rho dV}{r}$

I-4 APPLICATIONS

❖ Soit un fil de longueur 2L portant une densité linéique de charge λ positive et uniforme. Déterminons le champ électrique créé par cette distribution en un point M situé à une distance x sur sa médiatrice.



Pour raison de symétrie le champ électrostatique est nul selon Oz $E(M)_{/Oz} = 0$

Il ne reste que la composante du champ selon OX :

$$d\vec{E}(M) = 2\, d\vec{E}_{/OX}\, \vec{\imath} = 2dE \cos\alpha\, \vec{\imath}$$

$$\vec{E}(M) = 2\int_0^L dE \cos\alpha\, \vec{\imath} \qquad E(M) = 2\int_0^L dE \cos\alpha$$

$$E(M) = 2\int_0^L \frac{Kdq}{r^2}\cos\alpha = 2\int_0^L \frac{K\lambda dl}{r^2}\cos\alpha$$

Avec : $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ d'où $r = \frac{x}{\cos\alpha}$ et $r^2 = \frac{x^2}{\cos\alpha^2}$

On a aussi $\tan\alpha = \frac{l}{x}$ d'où $l = x\tan\alpha$ et $dl = \frac{x}{\cos\alpha^2}\,d\alpha$ avec $dl = dZ$

On obtient finalement :

$$E(M) = \frac{2K\lambda}{x}\int_0^{\phi}\cos\alpha\ d\alpha \quad = \frac{2K\lambda}{x}\ \sin\phi \qquad \text{Avec} \quad \sin\phi = \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

$$\vec{E}\,(M) = \frac{2K\lambda}{x}\ \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\ \vec{\imath}$$

Si le fil est infini alors $\phi = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{E}\,(M) = \frac{2K\lambda}{x}\ \vec{\imath}$

- Soit un fil circulaire de centre o et de rayon R , chargé avec une densité linéique λ positive et uniforme. Déterminons le champ électrique crée par cette distribution en un point M placé sur son axe de révolution tel que OM = Z (Fig 1).

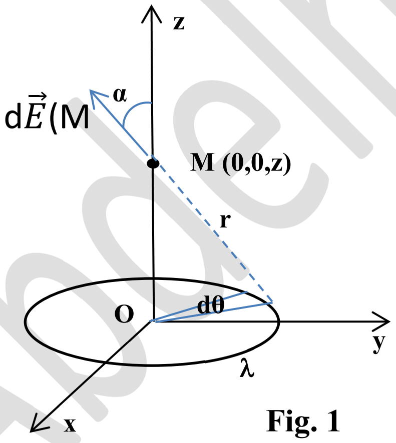


Fig. 1

Pour des raisons de symétrie le champ est :

- Nul sur OX : $dE_{OX} = 0$
- Nul sur OY : $dE_{OY} = 0$
- Il ne reste que la composante sur OZ : $dE_{Oz} = dE\cos\alpha$

$$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}(M) \quad = \quad \int dE\ \cos\alpha\ \vec{k} \qquad \vec{E} = \int k\ \frac{dq}{r^2}\ \cos\alpha\ \vec{k}$$

$$\vec{E} = \int k\ \frac{\lambda dl}{r^2}\cos\alpha\ \ \vec{k}$$

Avec : $\cos\alpha = \frac{Z}{r} = \frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}$

$$\vec{E} = \int k \frac{\lambda dl}{Z^2+R^2} \frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}} \vec{k} = \int k \frac{Z\lambda dl}{\sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \vec{k} = K\lambda Z \int \frac{dl}{\sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \vec{k}$$

Avec : $dl = R d\theta$

$$\vec{E} = K\lambda Z \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{\sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \vec{k} = K\lambda \frac{RZ}{\sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \int_0^{2\pi} d\theta\, \vec{k} = \frac{\lambda RZ}{2\varepsilon_0 \sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \vec{k}$$

- Soit un disque circulaire de centre o et de rayon R , chargé en surface, avec une densité superficielle σ positive et uniforme. Déterminons le champ électrique crée par cette distribution en un point M placé sur l'axe de révolution du disque tel que OM = Z (Fig 2).

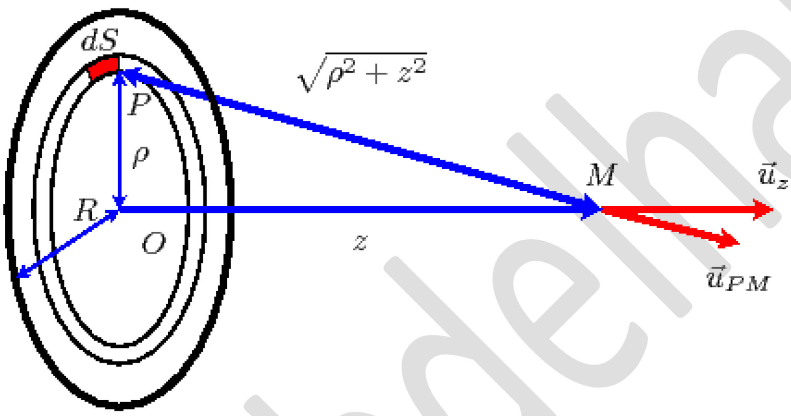


Fig 2

Nous avons une symétrie de distribution de charge qui fait que le champ final est selon l'axe OZ :

$$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}(M) = \int dE \cos\alpha\ \vec{u}_Z \qquad \vec{E} = \int k \frac{dq}{r^2} \cos\alpha\ \vec{u}_Z$$

$$\vec{E} = K \iint \frac{\sigma dS}{r^2} \cos\alpha\ \vec{u}_Z$$

Avec $\cos\alpha = \frac{Z}{\sqrt{\rho^2+Z^2}}$ et $r^2 = \rho^2 + Z^2$

$$E = K\sigma \iint \frac{dS}{r^2} \cos\alpha = K\sigma \iint \frac{Z dS}{\sqrt[3]{\rho^2+Z^2}}$$

Avec $S = \pi\rho^2$ d'où $dS = 2\pi\rho d\rho$

$$E = K\sigma\pi \int_0^R \frac{2Z\rho d\rho}{\sqrt[3]{\rho^2+Z^2}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon}\int_0^R \frac{2Z\rho d\rho}{\sqrt[3]{\rho^2+Z^2}}$$

de la forme : $\int u'u^n = \frac{U^{n+1}}{n+1}$

Ce qui donne :

$$E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}} - \frac{Z}{|Z|}\right]$$

On obtient finalement :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{|Z|} - \frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}\right]$$

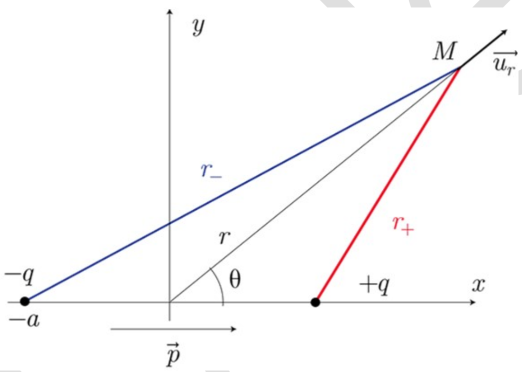
Et $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{|Z|} - \frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}\right]\vec{u}_Z$

I-5 Dipôle électrostatique

Un dipôle électrostatique est un ensemble formé par deux charges égales et opposées.

Son moment dipolaire est donné par : $\vec{P} = +2a\,q\,\vec{u}$ (1.10)

I-5-1 Potentiel crée par un dipôle à grande distance



$r \gg a$

$$V(M) = V_{+q}(M) + V_{-q}(M)$$

$$V(M) = Kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

$$r_+ = \sqrt{r^2 - 2ra\cos\theta + a^2} = (r^2 - 2ra\cos\theta + a^2)^{1/2}$$

$$= r\left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

or $r \gg a$ et $r^2 \ggg a^2$ et $\frac{a^2}{r^2} \lll 1$

De même pour r- , On obtient : $V(M) = K\frac{2qa}{r^2}\cos\theta = K\frac{\overrightarrow{p.u_r}}{r^2}$

I-6 Théorème de Gauss

I-6-1 Enoncé

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à $1/\varepsilon_0$ fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface.

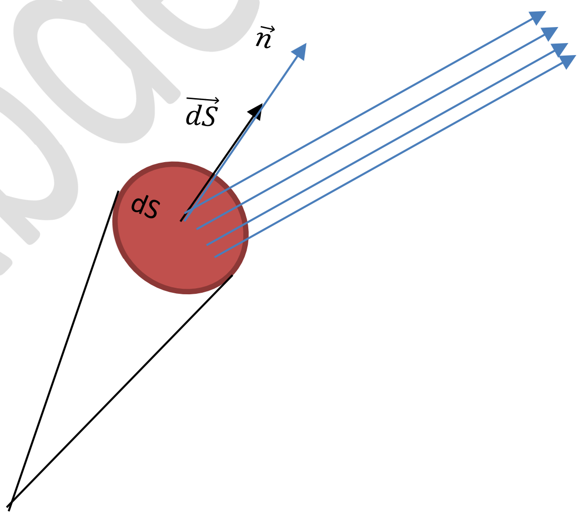
$$\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (1.11)$$

Rappel sur le flux :

dS est un élément de surface

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire sortant et normal à la surface : $\overrightarrow{dS} = \vec{n}\,dS$

$$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} \Rightarrow \phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



I-6-2 Exemples d'application

I-6-2-a Sphère chargée en volume

Soit une sphère de centre O et de rayon R, uniformément chargée en volume, avec une densité volumique ρ constante et positive.

En utilisant le théorème de Gauss, déterminons le champ électrostatique crée par cette distribution en tous points de l'espace ?(M à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère).

Les étapes à suivre pour le calcul du champ électrostatique par la méthode de Gauss sont :

1 / Rechercher les symétries du problème.

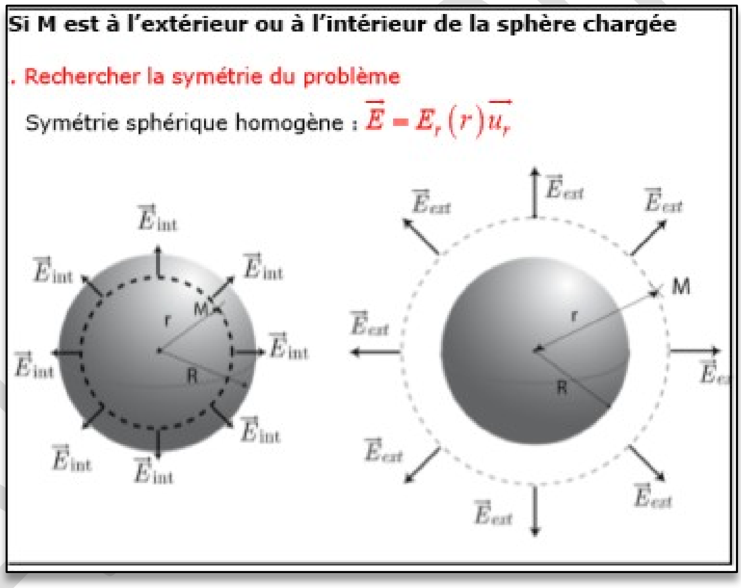
2/ Définir une surface de Gauss.

3/Appliquer le théorème de Gauss.

Dans ce cas nous avons une symétrie sphérique et le champ est sortant (charge est positive) selon $\overrightarrow{e_r}$ ou $\overrightarrow{u_r}$ (selon les littératures).

$$\vec{E} = E\ \overrightarrow{e_r}$$

La surface de Gauss qui correspond à la symétrie du problème est une sphère de centre O et de rayon r.



[1]

1^{er} cas M à l'intérieur de la sphère (r<R)

$$\phi = \oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires alors $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$= E.ds.cos 0=E.dS

$$\oiint E.dS = 4\pi r^2 E_{int} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dv = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint dv$$

$$4\pi r^2 E_{int} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_{int} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \qquad \overrightarrow{E_{int}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\overrightarrow{e_r}$$

2ème cas M à l'extérieur de la sphère (r>R)

$$\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

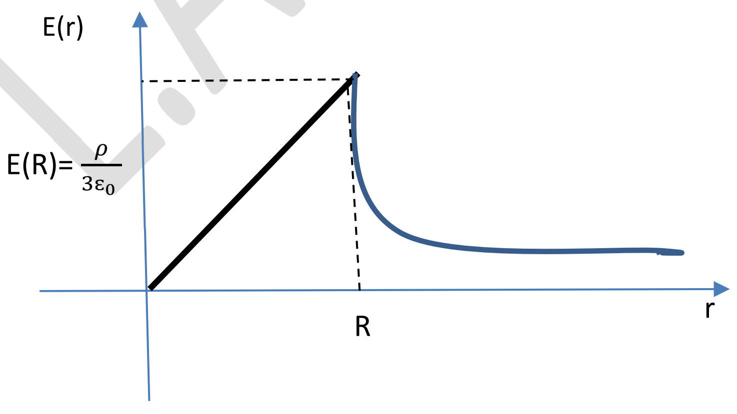
$$4\pi r^2 E_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dv = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint dv$$

$$4\pi r^2 E_{ext} = \frac{4\rho}{3\varepsilon_0}\pi R^3$$

$$E_{ext} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

$$\overrightarrow{E_{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

On peut tracer l'allure du champ électrostatique en fonction de r :



I-6-2-b Sphère chargée en surface

Soit une sphère de centre O et de rayon R, uniformément chargée en surface, avec une densité surfacique б constante et positive.

En utilisant le théorème de Gauss, déterminons le champ électrostatique crée par cette distribution en tout point de l'espace ? (M à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère).

Dans ce cas nous avons une symétrie sphérique et le champ est sortant (charge est positive) selon $\overrightarrow{e_r}$.

$$\vec{E} = E\ \overrightarrow{e_r}$$

La surface de Gauss qui correspond à la symétrie du problème est une sphère de centre O et de rayon r.

<u>1er cas M à l'intérieur de la sphère(r<R)</u>

$$\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$E_{int} = 0$$

<u>2ème cas M à l'extérieur de la sphère(r>R)</u>

$$\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires alors $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$= E.ds.cos 0 = E.dS

$$\oiint E.dS = 4\pi r^2 E_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint б dS = \frac{б}{\varepsilon_0}\iint dS$$

$$4\pi r^2 E_{ext} = \frac{б}{\varepsilon_0} 4\pi R^2$$

$$E_{ext} = \frac{б}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$$

$$\overrightarrow{E_{ext}} = \frac{б}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

On peut en déduire le potentiel V(M) en tout point de l'espace.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V \qquad dV = -\vec{E}\,.\,\vec{dl} \qquad V = -\int \vec{E}\,.\,\vec{dl} = -\int E.dr$$

Pour r>R

$$V_{ext} = -\int E.dr = -\int \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}.dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int -\frac{dr}{r^2} = +\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C^{ste}{}_1$$

On a le potentiel nul à l'infini V (∞) = 0 , alors $C^{ste}{}_1 = 0$

$$V_{ext} = +\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$$

Pour r <R

$$V_{int} = -\int E.dr = -\int 0\,dr = C^{ste}{}_2$$

Et pour raison de continuité du potentiel on peut écrire :

$V_{int} = V_{ext}$ quand $r \rightarrow R$

$$+\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R} = C^{ste}{}_2 = V_{int} = +\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$