Table des Matières

Chapitre I

Logique et raisonnements

1 Logique

1.1 Assertions

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.1

$2+2=4$ *est une assertion vraie.*

$3\times 2=7$ *est une assertion fausse.*

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ *on a* $x^2\geq 0$ *est une assertion vraie.*

Pour tout $z\in\mathbb{C}$ *on a* $|z|=1$ *est une assertion fausse.*

Si P *est une assertion et* Q *est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de* P *et de* Q*.*

L'opérateur logique *et* $(\wedge)$

L'assertion $\ll P\,et\,Q \gg$ est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion $\ll P\,et\,Q\gg$ est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P\wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.2
"$3+5=8 \ \wedge \ 3\times 6=18$" *est une assertion vraie*
"$2+2=4 \ \wedge \ 2\times 3=7$" *est une assertion fausse.*

L'opérateur logique *ou* $(\vee)$
L'assertion ≪ $P\,ou\,Q$ ≫ est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion ≪ $P\,ou\,Q$ ≫ est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P\vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.3
"$2+2=4 \ \vee \ 3\times 2=6$" *est une assertion vraie*
"$2=4 \ \vee \ 4\times 2=7$" *est une assertion fausse.*

1.1.1 La négation $\overline{P}$

L'assertion ≪ $\overline{P}$ ≫ est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Exemple 1.4
La négation de l'assertion $3\geq 0$ *elle est l'assertion* $3 \gneqq 0$.

1.1.2 L'implication $\Rightarrow$

La définition mathématique est la suivante :
L'assertion ≪ $\overline{P}\,ou\,Q$ ≫ est notée $P\Rightarrow Q$
Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.5
$2+2=5 \Rightarrow \sqrt{2}=2$ *est vraie ! Eh oui, si* P *est fausse alors l'assertion* $P \Rightarrow Q$ *est toujours vraie.*

1.1.3 L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'équivalence est définie par : $\ll P \Longleftrightarrow Q \gg$ est l'assertion $\ll (P \Rightarrow Q)\, et\, (Q \Rightarrow P) \gg$
On dira $\ll$ P est équivalent à Q $\gg$ ou $\ll$ P équivaut à Q $\gg$ ou $\ll$ P si et seulement si Q $\gg$. Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.
La table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2 Quantificateurs

Le quantificateur $\forall$: $\ll$ pour tout $\gg$
L'assertion

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit $\ll$ Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie $\gg$.
Par exemple :
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1$ est une assertion fausse.

Le quantificateur $\exists$: $\ll$ il existe $\gg$

L'assertion

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit $\ll$ il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) $\gg$.

Par exemple :

$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$ est vraie, par exemple $x = 0$.

$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$ est fausse.

La négation des quantificateurs

La négation de $\ll \forall x \in E,\ P(x) \gg$ est $\ll \exists x \in E,\ \overline{P(x)} \gg$.

Exemple : la négation de $\ll \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 \gg$ est l'assertion $\ll \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0 \gg$

La négation de $\ll \exists x \in E,\ P(x) \gg$ est $\ll \forall x \in E,\ \overline{P(x)} \gg$.

Exemple : la négation de $\ll \exists x \in \mathbb{R},\ x \leq 0 \gg$ est l'assertion $\ll \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \gg$

2 Raisonnements

2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 2.1 *Montrer que si* $a = b \Longrightarrow \dfrac{a+b}{2} = b$

on a

$$\begin{aligned} a = b &\Longrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b \end{aligned}$$

2.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante.

L'assertion $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \Longrightarrow Q$.

On montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*
Démonstration
Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.
Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair .

2.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $\ll P \Longrightarrow Q \gg$ repose sur le principe suivant : On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $\ll P \Longrightarrow Q \gg$ est vraie.

Exemple 2.3 *Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.*
Démonstration
Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$.
Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.
Conclusion : si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

2.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\ll \forall x \in E\ P(x) \gg$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $p(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de $\ll \forall x \in E,\ P(x) \gg$ est $\ll \exists x \in E,\ \overline{P(x)} \gg$). Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\ll \forall x \in E,\ P(x) \gg$.

Exemple 2.4 *Montrer que l'assertion suivante est fausse $\ll \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1 \gg$*
***Démonstration**. Un contre-exemple est $x = 0.5$*

2.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

• On prouve $P(0)$. Est vraie.
• On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.
Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.5 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n$.*
Démonstration *Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$*
Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \qquad \textit{car par } P(n) \textit{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 \qquad \textit{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie
Conclusion*. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.*

Remarque 2.1 *Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.*

Exercice 1.1

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?

2. Donner leur négation.

Exercice 1.2

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}\ x^2 = 4 \ \ldots\ldots\ x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C}\ z = \overline{z} \ \ldots\ldots\ z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}\ x = \pi \ \ldots\ldots\ e^{2ix} = 1$.

Exercice 1.3

Montrer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre II

Les ensembles, les relations et les applications

vous connaissez déjà quelques ensembles :

- l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
- l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, par exemple 3, $\sqrt{2}$, π, $\ln(2)$,...
- l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Nous allons essayer de voir les propriétés des ensembles, sans s'attacher à un exemple particulier.
Vous vous apercevrez assez rapidement que ce qui est au moins aussi important que les ensembles, ce sont les relations entre ensembles : ce sera la notion d'application (ou fonction) entre deux ensembles.

1 Ensembles

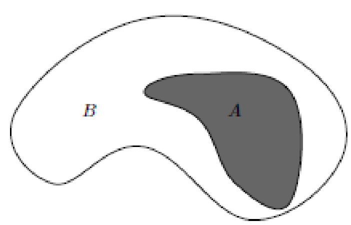
1.1 Définir des ensembles

- On va définir informellement ce qu'est un ensemble : un ensemble est une collection d'éléments.

- Exemples :
$$\{0,1\}, \quad \{\text{rouge}, \text{noir}\}, \quad \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}.$$
- Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\varnothing$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.
- On note $\boxed{x \in E}$ si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.
- Voici une autre façon de définir des ensembles : une collection d'éléments qui vérifient une propriété.
- Exemples :
$$\Big\{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 1\Big\}, \quad \Big\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\Big\}, \quad \Big\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\Big\} = [0,1].$$

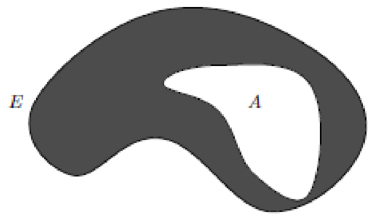
1.2 Inclusion, union, intersection, complémentaire

- L'inclusion. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit : $\forall x \in E \ (x \in F)$. On dit alors que E est un sous-ensemble de F ou une partie de F.



$A \subset B$

- L'égalité. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.
- Ensemble des parties de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple si $E = \{1,2,3\}$:
$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$
- Complémentaire. Si $A \subset E$.
$$\boxed{\complement_E A = \Big\{x \in E \mid x \notin A\Big\}}$$

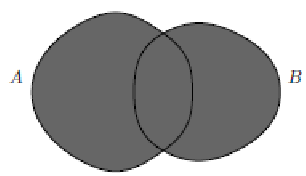


$\complement_E A$

- Union. Pour $A, B \subset E$.

$$\boxed{A \cup B = \Big\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\Big\}}$$

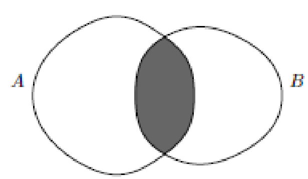
Le *"ou"* n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.



$A \cup B$

- intersection.Pour $A, B \subset E$.

$$\boxed{A \cap B = \Big\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\Big\}}$$

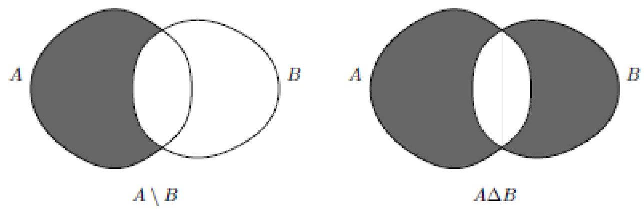


$A \cap B$

- L'ensemble fini On dit que l'ensemble E est fini si nombre d'éléments de E est fini.
  Nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E noté $Card(E)$
  Par exemple si $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$
  donc $Card(E) = 6$
  $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.
  $Card(\emptyset) = 0$.

- $A \setminus B$ l'ensemble $\left\{x \in A \mid x \notin B\right\}$ et on l'appelle différence de A et B.

- $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et on l'appelle différence symétrique A et B.



Proposition 1.1 *Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.*

- $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *et* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité)*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *et* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité)*
- $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$ *et* $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ *(loi de Morgan)*
- $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$

Preuve 1.1
- *Preuve de* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A$ *et* $x \in (B \cup C) \iff x \in A$ *et* $(x \in B$ *ou* $x \in C) \iff (x \in A$ *et* $x \in B)$ *ou* $(x \in A$ *et* $x \in C) \iff (x \in A \cap B)$ *ou* $(x \in A \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- *Preuve de* $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$: $x \in \complement_E (A \cap B) \iff x \notin (A \cap B) \iff \overline{\left(x \in A \cap B\right)} \iff \overline{\left(x \in A \text{ et } x \in B\right)} \iff \overline{(x \in A)}$ *ou* $\overline{(x \in B)} \iff x \notin A$ *ou* $x \notin B \iff x \in \complement_E A \cup \complement_E B$.

1.3 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles.
Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$$\boxed{E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.}$$

Exemple 1.1 $E = \{1, 2\}$ *et* $F = \{3, 5\}$ *alors*

$$E \times F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}.$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

2 Relations d'équivalence-Relations d'ordre

2.1 Relations binaires

Définition 2.1 *On appelle relation binaire, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note xRy et on lit $\ll$ x est en relation avec y $\gg$.*

2.2 Relation d'équivalence

Définition 2.2 *Soit R une relation binaire dans un ensemble E et x, y, z des éléments de E, R est dite*
♣ *Réflexive si : xRx c'est à dire chaque élément est en relation avec lui même.*
♣ *Symétrique si : $xRy \Longrightarrow yRx$. Si x est en relation avec y alors y est en relation avec x.*
♣*Transitive si : $[xRy \text{ et } yRz] \Longrightarrow xRz$. Si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z.*
♣*Anti-symétrique si : $[xRy \text{ et } yRx] \Longrightarrow x = y$. Si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux.*
La relation R est une relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Dans ce cas, on appelle classe d'équivalence d'un élément x de E, l'ensemble des éléments de E en relation avec x par R, notée $\dot{x}$ ou $cl(x)$ ou bien $C(x)$:

$$\boxed{\dot{x} = \{y \in E \mid yRx\}.}$$

La classe d'équivalence $\dot{x}$ est non vide car R est réflexive et contient de ce fait au moins x. On notera par

$$\boxed{E/R = \{\dot{x} \mid x \in E\}.}$$

L'ensemble des classes d'équivalence de E par la relation R. (ou l'ensemble quotient de E par la relation d'équivalence R)

Exemple 2.1 *Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation R par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2$$

Montrer que R est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient $\mathbb{R}/R$

• *R est une relation d'équivalence.*

★ *R est une relation réflexive,car*

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = x^2$ *donc*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xRx$$

ce qui montre que R est une relation réflexive.

★ *R est une relation Symétrique, car*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R},\ (xRy) &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Longleftrightarrow y^2 = x^2 \\ &\Longleftrightarrow yRx \end{aligned}$$

★ *R est une relation Transitive, car*

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (xRy) \wedge (yRz) &\Longrightarrow x^2 = y^2\ \wedge y^2 = z^2 \\ &\Longrightarrow x^2 = z^2 \\ &\Longrightarrow xRz \end{aligned}$$

ce qui montre que R est une relation Transitive. on déduit que R est une relation d'équivalence.

• *Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}/R$*

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \qquad xRy &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Longleftrightarrow (y = x)\ \vee\ (y = -x) \end{aligned}$$

donc : $\dot{x} = \{x, -x\}$, par suite

$$\mathbb{R}/R = \{\{x, -x\}\}$$

2.3 Relation d'ordre

Définition 2.3 *Une relation R sur E est dite relation d'ordre si elle est antisymétrique, transitive et réflexive.*

Exemple 2.2 *Soit R la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation $\ll x$ divise $y \gg$. Vérifions qu'elle est antisymétrique*

$$\begin{aligned} xRy &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \quad : \ y = kx \\ yRx &\Longleftrightarrow \exists k' \in \mathbb{N}^* \quad : \ x = k'y \end{aligned}$$

il vient que $kk' = 1$, comme k et $k' \in \mathbb{N}^*$, alors $k = k' = 1$ c'est-à-dire $x = y$.

2.3.1 L'ordre total et l'ordre partiel

Définition 2.4 *Soit R une relation d'ordre définie sur un ensemble E, alors si pour tout $x, y \in E$, on a ou bien xRy ou yRx, on dira que l'ordre est total, si non c'est à dire*

$$\exists \alpha, \beta \in E \text{ tel que on a ni } \alpha R \beta \text{ ni } \beta R \alpha$$

alors R est un ordre partiel.

Exemple 2.3 *Soit R une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par:*

$$pRq \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{tel que} \quad p^n = q$$

R est un ordre partiel car:

$$\text{pour } \alpha = 2 \text{ et } \beta = 3 \text{ ni } \alpha R \beta \text{ ni } \beta R \alpha$$

3 Applications

Définition 3.1 *On appelle Fonctions d'un ensemble E dans un ensemble F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F.*
Domaine de définition de f : *noté D_f l'ensemble des éléments $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$.*
$y = f(x)$ est appelé image de x et x est un antécédant de y.
E est appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de l'application f.
On écrit

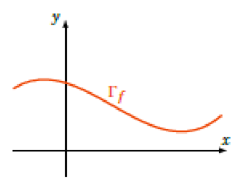
$$f \ : E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto f(x)$$

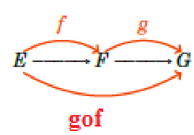
Définition 3.2 *L'application est une fonctions d'un ensemble E dans un ensemble F,tel que $D_f = E$*

- Égalité. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

- graphe de $f : E \to F$ est $\boxed{\Gamma_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}}$



- Composition. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.



Exemple 3.1 *1. L'identité, $id_E : E \longrightarrow E$ est simplement définie par $x \longrightarrow x$ et sera très utile dans la suite.*
2. Définissons f, g ainsi

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ ]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} g \ : \ ]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

Alors $g \circ f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

3.1 Restriction et prolongement d'une application

Définition 3.3 *Etant donnée une application* $f : E \longrightarrow F$
1· *On appelle restriction de* f *à un sous ensemble non vide* X *de* E*, l'application* $g : X \longrightarrow F$ *telle que*

$$\forall x \in X, \quad g(x) = f(x)$$

On note $g = f_{|X}$.
2· *Etant donné un ensemble* G *tel que* $E \subset G$*, on appelle prolongement de l'application* f *à l'ensemble* G*, toute application* h *de* G *dans* F *telle que* f *est la restriction de* h *à* E*.*
D'après cette définition, f *est un prolongement de* $f_{|X}$ *à* E*.*

Exemple 3.2 *Etant donnée l'application*

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}.$$

alors
$$\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln|x| \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} h : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(2|x| - x) \end{array}.$$
sont deux prolongements différents de f *à* $\mathbb{R}^*$*.*

3.2 Image directe, image réciproque

Soient E, F deux ensembles.

Définition 3.4 *Soit* $A \subset E$ *et* $f : E \longrightarrow F$*, l'image directe de* A *par* f *est l'ensemble*

$$\boxed{f(A) = \Big\{f(x) \mid x \in A\Big\}}$$

Définition 3.5 *Soit* $B \subset F$ *et* $f : E \longrightarrow F$*, l'image réciproque de* B *par* f *est l'ensemble*

$$\boxed{f^{-1}(B) = \Big\{x \in E \mid f(x) \in B\Big\}}$$

4 Injection, surjection, bijection

4.1 Injection, surjection

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Définition 4.1 *f est injection si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall x, x' \in E \quad \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)}$$

Définition 4.2 *f est surjection si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Exemple 4.1

1. *Soit $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$.*
   Montrons que f_1 est injective : soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f_1(x) = f_1(x')$.
   Alors $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x'}$, donc $1 + x = 1 + x'$ et donc $x = x'$.
   Ainsi f_1 est injective.
   Par contre f_1 n'est pas surjective. Il s'agit de trouver un élément y qui n'a pas d'antécédent par f_1. Ici il est facile de voir que l'on a toujours $f_1(x) \leq 1$ et donc par exemple $y = 2$ n'a pas d'antécédent.
   Ainsi f_1 n'est pas surjective.

2. *Soit $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f_2(x) = x^2$.*
   Alors f_2 n'est pas injective.
   En effet on peut trouver deux éléments $x, x' \in \mathbb{Z}$ différents tels que $f_2(x) = f_2(x')$.
   Il suffit de prendre par exemple $x = 2$, $x' = -2$.
   f_2 n'est pas non plus surjective, en effet il existe des éléments $y \in \mathbb{N}$ qui n'ont aucun antécédent. Par exemple $y = 3$: si $y = 3$ avait un antécédent x par f_2, nous aurions $f_2(x) = y$, c'est-à-dire $x^2 = 3$, d'où $x = \pm\sqrt{3}$.
   Mais alors x n'est pas un entier de $\mathbb{Z}$.
   Donc $y = 3$ n'a pas d'antécédent et f_2 n'est pas surjective.

4.2 Bijection

Définition 4.3 *f est bijective si elle injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists \text{ unique } x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Proposition 4.1 *Soit E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$.*

2. *Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la bijection réciproque (ou l'application réciproque) de f et est notée f^{-1}. De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Remarque 4.1

- *$f \circ g = id_F$ se reformule ainsi*

$$\forall y \in F \quad f\Big(g(y)\Big) = y.$$

- *Alors que $g \circ f = id_E$ s'écrit :*

$$\forall x \in E \quad g\Big(f(x)\Big) = x.$$

- *Par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective, sa bijection réciproque est $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \ln(y)$.*
  Nous avons bien $\exp\Big(\ln(y)\Big) = y$, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et $\ln\Big(\exp(x)\Big) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Exercice 2.1
Montrer par contraposition la assertion suivante, E étant un ensemble :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$

Exercice 2.2
Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ et $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.

Exercice 2.3
Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Longrightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 2.4
Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Longleftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.5
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2-1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 2.6
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Exercice 2.7

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Chapitre III

Les fonctions réelles à une variable réelle

1 Notions de fonction

1.1 Définitions

Définition 1.1 *Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$.*
En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

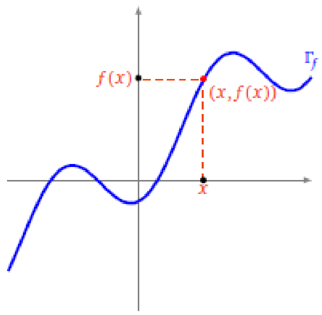
Exemple 1.1 *La fonction inverse :*

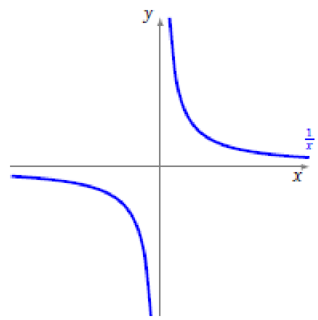
$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Le graphe d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\Gamma_f = \Big\{(x, f(x)) \mid x \in U\Big\}.}$$

Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (à droite).





1.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la somme de f et g est la fonction $f + g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.2 *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors:*

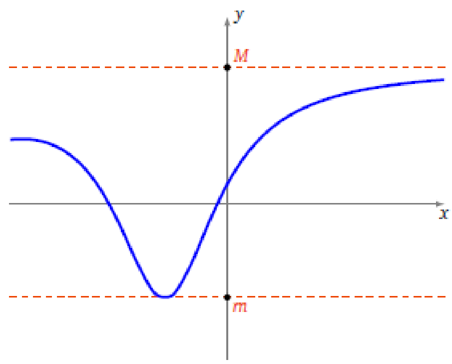
- $f \geq g$ *si* $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ *si* $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ *si* $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f *est dite constante sur* U *si* $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \ f(x) = a$;
- f *est dite nulle sur* U *si* $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

Définition 1.3 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \ f(x) \leq M$;

- *f est minorée sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \geq m$;*
- *f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in U \quad |f(x)| \leq M$.*

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).

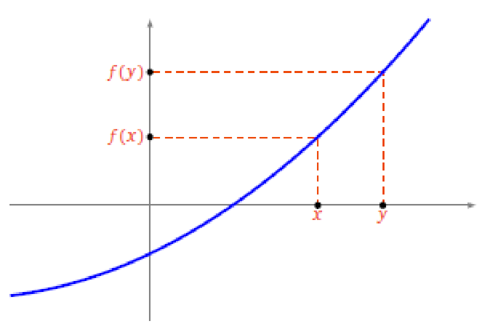


1.4 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 1.4 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- *f est croissante sur U si $\forall a, b \in U \quad a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$*
- *f est strictement croissante sur U si $\forall a, b \in U \quad a < b \implies f(a) < f(b)$*
- *f est décroissante sur U si $\forall a, b \in U \quad a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$*
- *f est strictement décroissante sur U si $\forall a, b \in U \quad a < b \implies f(a) > f(b)$*
- *f est monotone (resp. strictement monotone) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.*

Voici le graphe d'une fonction strictement croissante



Exemple 1.2 • *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ *est strictement croissante.*

- *Les fonctions exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et logarithme* $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *sont strictement croissantes.*

- *La fonction valeur absolue* $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *n'est ni croissante, ni décroissante.*

  Par contre, la fonction $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *est strictement croissante.*

1.5 Parité et périodicité

Définition 1.5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a,a[$ ou $[-a,a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :*

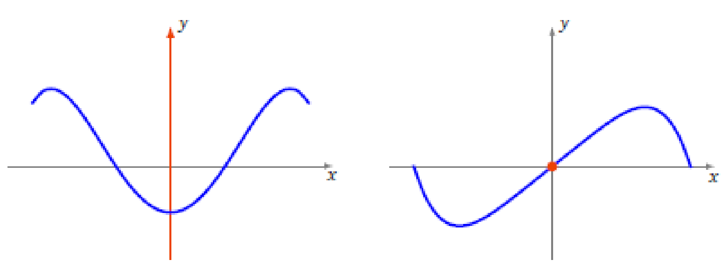
- *f est paire si* $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,

- *f est impaire si* $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).

- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



Exemple 1.3 • *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est paire. La fonction* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est impaire.*

Définition 1.6 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.*

Exemple 1.4 *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.*

2 Limites

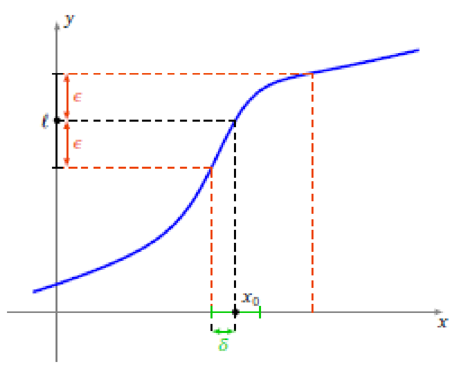
2.1 Limite en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 2.1 *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon}$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.



Remarque 2.1
- *L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.*
- *L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$*

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 2.2 • *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

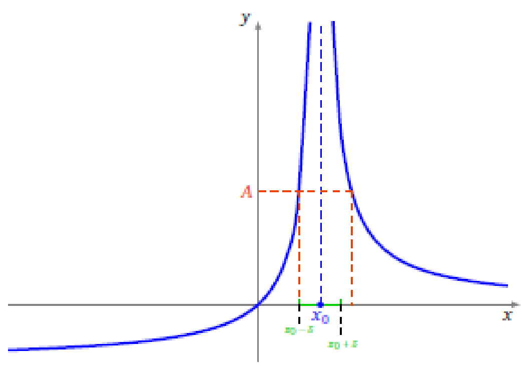
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

• *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



2.2 Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 2.3 • *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

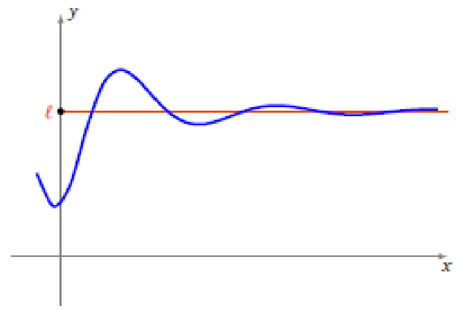
On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim_{+\infty} f = \ell$.

• *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $] - \infty, a[$.



Exemple 2.1 *On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad$ *et* $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0 \quad$ *et* $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0.$

2.2.1 Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 2.4
- *On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f\big|_{]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^+} f$.*
- *On définit de même la limite à gauche en x_0 de f : la limite de la fonction $f\big|_{]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^-} f$.*
- *On note aussi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$ pour la limite à gauche.*

Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

3 Unicité de la limite

Proposition 3.1 *Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.*

Proposition 3.2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell$

Exemple 3.1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2x+3 & si \quad x \geq 0 \\ 4x+5 & si \quad x < 0 \end{cases}.$$

On a

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 3$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 5$ *Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en* 0.

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$

Proposition 3.3 *Si* $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors :*

- $\lim\limits_{x_0} (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0} (f+g) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$
- *si* $\ell \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

  De plus, si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *(ou* $-\infty$*) alors* $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = 0$
- *si h est une fonction bornée et* $\lim\limits_{x_0} f = 0$ *alors* $\lim\limits_{x_0} (h \cdot f) = 0$.

Proposition 3.4 *(Composition de limites)*

$$\boxed{Si \lim_{x_0} f = \ell \text{ et } \lim_{\ell} g = \ell', \text{ alors } \lim_{x_0} g \circ f = \ell'.}$$

Proposition 3.5

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leq \ell'$.
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- *Théorème des gendarmes*

$$\boxed{Si\ f \leq g \leq h \text{ et si } \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x_0} g = \ell.}$$

4 Continuité en un point

4.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 4.1 • *On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$

- *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*
  On note $C(I;\mathbb{R})$ ou $C^0(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.2 • *On dit que f est continue à droite en point $x_0 \in I$ si*

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

- *On dit que f est continue à gauche en point $x_0 \in I$ si*

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

Exemple 4.1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2x+1 & si \quad x > 1 \\ 3 \quad si \quad x = 1 \\ 4x+5 & si \quad x < 1 \end{cases} .$$

On a

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 3 = f(1)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 9 \neq f(1)$ *Dans ce cas on dit que* f *n'admet pas une limite en* 1.

f est continue à droite en 1 mais n'est pas ontinue à gauche en 1.

donc f n'est pas ontinue en 1

Exemple 4.2 *Les fonctions suivantes sont continues :*

- *la fonction racine carrée* $x \mapsto \sqrt{x}$ *sur* $[0, +\infty[$,
- *les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sur* $\mathbb{R}$,
- *la fonction valeur absolue* $x \mapsto |x|$ *sur* $\mathbb{R}$,
- *la fonction* $\exp$ *sur* $\mathbb{R}$,
- *la fonction* $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$.

Proposition 4.1 *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues en un point* $x_0 \in I$. *Alors*

- $\lambda \cdot f$ *est continue en* x_0 *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*),*
- $f + g$ *est continue en* x_0,
- $f \times g$ *est continue en* x_0,
- *si* $f(x_0) \neq 0$, *alors* $\dfrac{1}{f}$ *est continue en* x_0.

Proposition 4.2 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $f(I) \subset J$. *Si* f *est continue en un point* $x_0 \in I$ *et si* g *est continue en* $f(x_0)$, *alors* $g \circ f$ *est continue en* x_0.

4.2 Prolongement par continuité

Définition 4.3 *Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$.*
- *On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ \ell & si\ x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

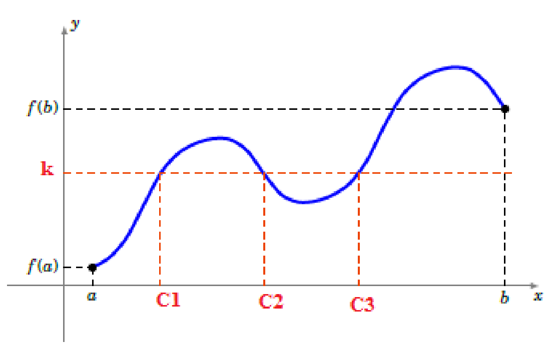
Exemple 4.3 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$
Le prolongement $\tilde{f}$ de f définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x sin\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

4.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.1 *Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$.*

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 4.2 *Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$.*

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

5 Fonctions monotones et bijections

5.1 Rappels : injection, surjection, bijection

Définition 5.1 *Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.*

- *f est injective si $\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;*
- *f est surjective si $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$;*
- *f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F\ \exists$ unique $x \in E \quad y = f(x)$.*

Proposition 5.1 *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.*

5.2 Fonctions monotones et bijections

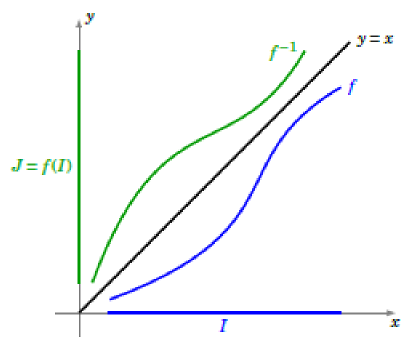
Lemme 5.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.

Preuve 5.1 *Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.*
par la contraposition $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$
Si on avait $x < x'$, alors on aurait nécessairement $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante.

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 5.1 (Théorème de la bijection) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*
3. *les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$.*



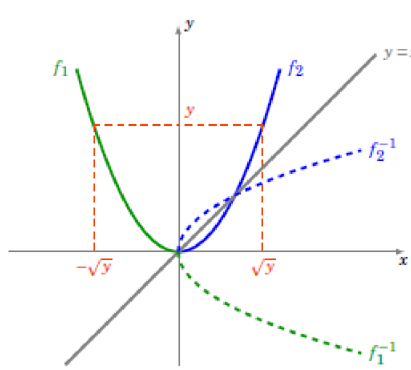
Exemple 5.1

$$f_1 : \begin{cases}]-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases} \qquad et \qquad f_2 : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

On remarque que $f(]-\infty, 0]) = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. *D'après le théorème précédent, les fonctions* f_1 *et* f_2 *sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques* $f_1^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 0]$ *et* $f_2^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$. *Soient deux réels* x *et* y *tels que* $y \geq 0$. *Alors*

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad ou \quad x = -\sqrt{y}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire y *admet (au plus) deux antécédents, l'un dans* $[0, +\infty[$ *et l'autre dans* $]-\infty, 0]$. *Et donc* $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ *et* $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. *On vérifie bien que chacune des deux fonctions* f_1 *et* f_2 *a le même sens de variation que sa réciproque.*



6 Dérivée

6.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 6.1 *f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0.*
La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Remarque 6.1 *Autre écriture de la dérivée.*

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*

Définition 6.2 *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.*
La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 6.1 *La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

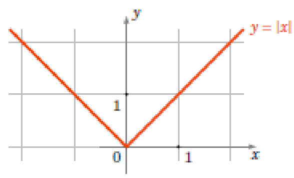
Définition 6.3

- *f est dérivable à droite en x_0, si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$*
- *f est dérivable à gauche en x_0, si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$*
- *f est dérivable en $x_0 \Longleftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$*

Proposition 6.1 *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Remarque 6.2 *La réciproque est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en* 0 *mais n'est pas dérivable en* 0*.*



En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ *en* $x_0 = 0$ *vérifie :*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite ($f'_d(0) = +1$*), une limite à gauche (*$f'_g(0) = -1$*) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en* 0*. Ainsi* f *n'est pas dérivable en* $x = 0$*.*
Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

Proposition 6.2 *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* I*. Alors pour tout* $x \in I$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où* λ *est un réel fixé*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *(si* $f(x) \neq 0$*)*
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(si* $g(x) \neq 0$*)*

Remarque 6.3 *Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :*

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \times g)' = f'g + fg'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Preuve 6.1 *Prouvons par exemple* $(f \times g)' = f'g + fg'$.
Fixons $x_0 \in I$. *Nous allons réécrire le taux d'accroissement de* $f(x) \times g(x)$:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)$$
$$\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

6.2 Dérivée de fonctions usuelles

u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	**Dérivée**
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	**Dérivée**
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

6.3 Composition

Proposition 6.3 *Si* f *est dérivable en* x_0 *et* g *est dérivable en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *de dérivée :*

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)}$$

Preuve 6.2

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$\xrightarrow[x \to x_0]{} g'\big(f(x_0)\big) \times f'(x_0).$$

Exemple 6.2 *Calculons la dérivée de* $\ln(1+x^2)$. *Nous avons* $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *; et* $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$. *Alors la dérivée de* $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$ *est*

$$\Big(g \circ f\Big)'(x) = g'\Big(f(x)\Big) \cdot f'(x) = g'\Big(1+x^2\Big) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

6.4 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.
Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.
Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \Big(f^{(n)}\Big)'$$

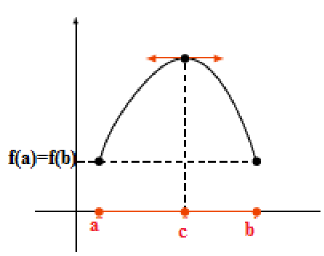
Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.
Si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I on dite que f est classe $C^n(I, \mathbb{R})$.

6.5 Théorème de Rolle

Théorème 6.1 (Théorème de Rolle) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

- f *est continue sur* $[a, b]$,
- f *est dérivable sur* $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.



il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

6.6 Théorème des accroissements finis

Théorème 6.2 (Théorème des accroissements finis) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\ (b-a)}$$

Preuve 6.3 *Posons $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x-a)$.*
Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) = f(a)$.
Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

6.7 Fonction croissante et dérivée

Corollaire 6.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est croissante ;*
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est constante ;*
4. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *est strictement décroissante.*

Remarque 6.4 *La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse.*
Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Corollaire 6.2 (Règle de l'Hospital) *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$.*
On suppose que

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$*,(ou ∞)*

$$\boxed{\text{Si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

Exemple 6.3 *Calculer la limite en 1 de* $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$*. On vérifie que :*

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to 1]{} 3.$$

Exercice 3.1

1. Démontrer que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.2

Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = (\sin x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 3.3

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin(\frac{1}{x}) \ ; \quad b)\ f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ ;$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \ .$$

Exercice 3.4

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}} \ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2\,x - 5} \ ; \quad h(x) = \ln(4\,x+3)$$

Exercice 3.5

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0;$$

Chapitre IV

Fonctions élémentaires

Vous connaissez déjà des fonctions classiques : exp, ln, cos, sin, tan. Dans ce chapitre il s'agit d'ajouter à notre catalogue de nouvelles fonctions : cosh, sinh, tanh, arccos, arcsin, arctan, Argch, Argsh, Argth.

1 Fonctions trigonométriques

1.1 Les fonctions sinus et cosinus

Fonction	Domaine de définition	Parité	Période	Continuité	La dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	impaire	2π	sur $\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	paire	2π	sur $\mathbb{R}$	$-\sin x$

La relation fondamentale en trigonométrique est :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Formule d'addition $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a :

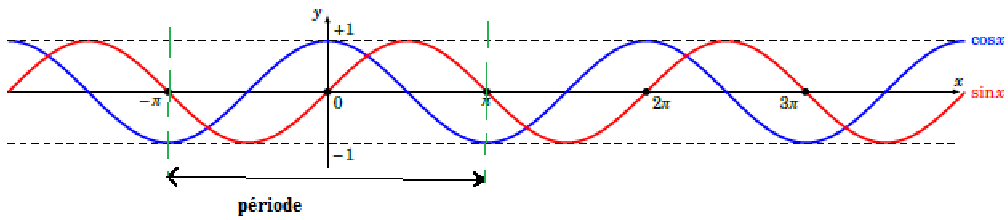
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Formule de duplication $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = -1 + 2\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

variations

les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur tout $\mathbb{R}$. Comme elles sont périodiques, de période 2π, on peut restreindre le domaine de l'étude à l'intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.



1.2 Les fonctions tangent et cotangente

Définition 1.1 ★ *On appelle tangente la fonction* tan *(ou tg) définie par :*

$$x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \forall x \in \mathbb{R} - A,\ où\ A = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

★ *On appelle cotangente la fonction* cot *définie par :*
$x \longmapsto \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x},\ \forall x \in \mathbb{R} - B,\ où\ B = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

Pour tout $x \in \mathbb{R} - (A \cup B)$, on a l'éalité : $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

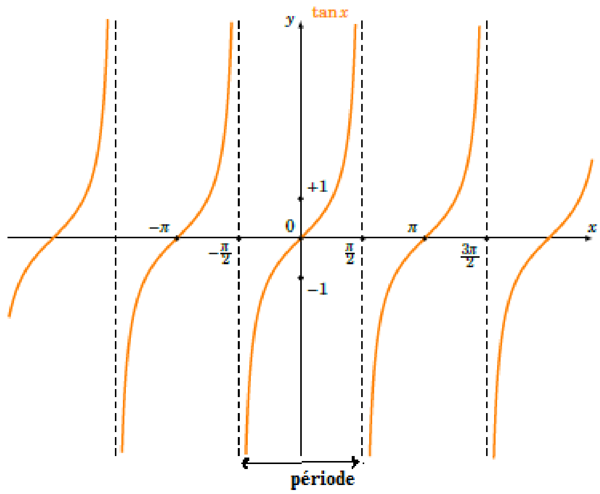
Dérivées-Variations

Les fonctions tangente et cotangente sont continues et dérivable sur leurs domaines se définition et l'on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - A \qquad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \Longleftrightarrow \tan' x = 1 + \tan^2 x}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - B \qquad \cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x} \Longleftrightarrow \cot' x = -(1 + \cot^2 x)}.$$

Les deux fonctions étant périodiques de période π, on peut donc restreindre le domaine de l'étude à un intervalle de longueur π, par exemple $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour la tangente et $]0, \pi[$ pour la cotangente.



2 Les fonctions trigonométriques réciproques

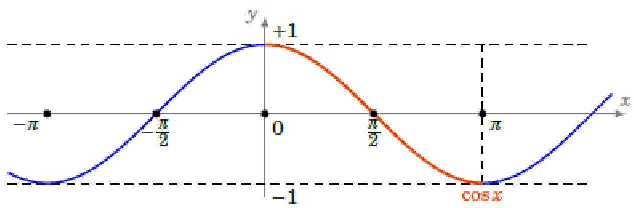
2.1 Arccosinus

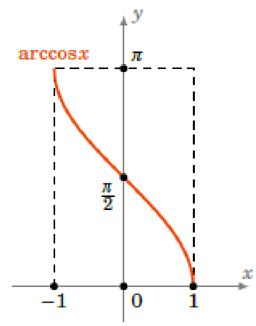
Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$.
Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa fonction (bijection) réciproque est la fonction arccosinus :

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$





On a donc, par définition de la fonction réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\Big(\arccos(x)\Big) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arccos\Big(\cos(x)\Big) = x & \forall x \in [0, \pi] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [0, \pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y}$$

la dérivée de arccos :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[}$$

Preuve 2.1 *On démarre de l'égalité* $\cos(\arccos x) = x$ *que l'on dérive :*

$$\begin{aligned} & \cos(\arccos x) = x \\ \Longrightarrow\ & -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) = 1 \\ \Longrightarrow\ & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\ \Longrightarrow\ & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \qquad (*) \\ \Longrightarrow\ & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Le point crucial $(*)$ *se justifie ainsi : on démarre de l'égalité* $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, *en substituant* $\alpha = \arccos x$ *on obtient* $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ *donc* $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$.

On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ *(avec le signe + car* $\arccos x \in [0,\pi]$*, et donc on a* $\sin(\arccos x) \geq 0$*).*

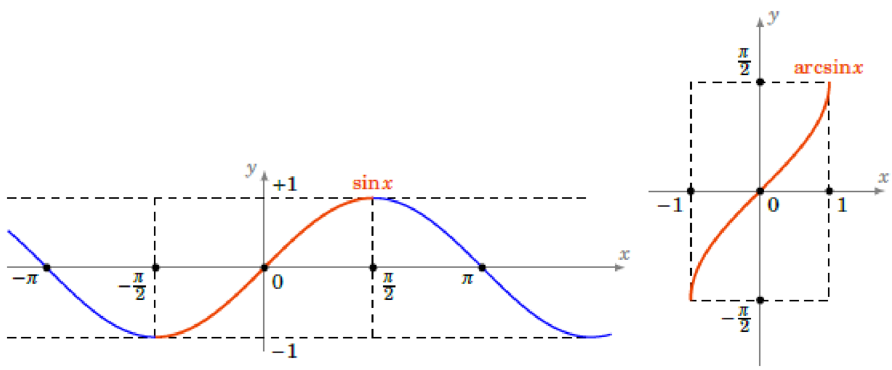
2.2 Arcsinus

La restriction

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

est une bijection.
Sa fonction réciproque est la fonction arcsinus:

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\Big(\arcsin(x)\Big) = x \quad \forall x \in [-1,1] \\ \arcsin\Big(\sin(x)\Big) = x \quad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y}$$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[}$$

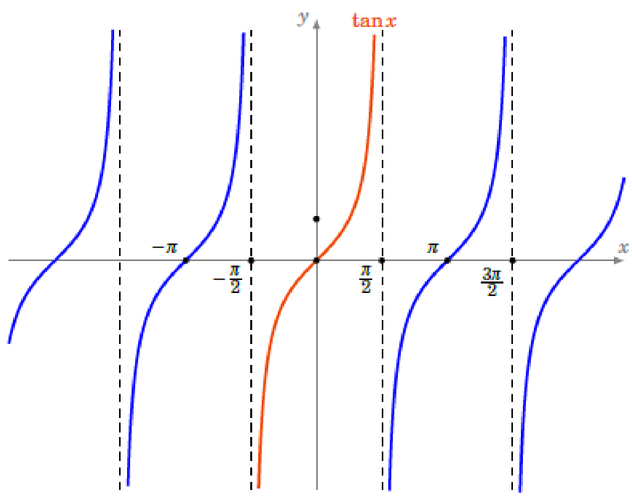
2.3 Arctangente

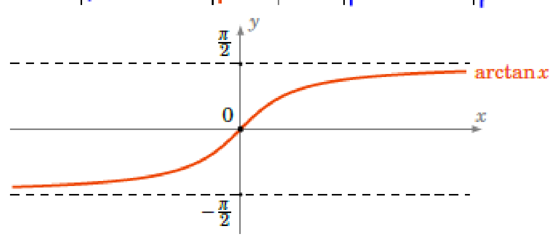
La restriction

$$\tan :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

est une bijection.
Sa fonction réciproque est la fonction arctangente :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan\big(\arctan(x)\big) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x & \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y}$$

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

3 Logarithme et exponentielle

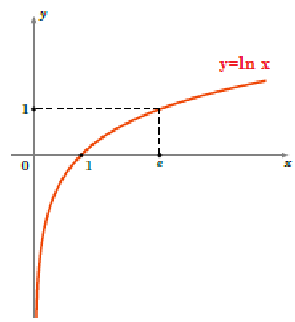
3.1 Logarithme

Proposition 3.1 *Il existe une unique fonction, notée* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{pour tout } x > 0) \qquad \text{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$*) :*

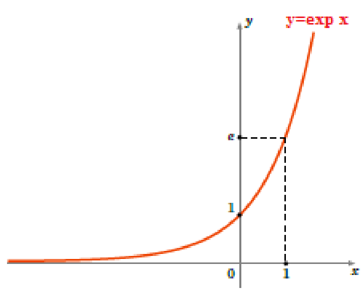
1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*)*
4. $\ln$ *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.



Remarque 3.1 $\ln x$ *s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme néperien*

3.2 Exponentielle

Définition 3.1 *La fonction réciproque de* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *s'appelle la fonction exponentielle, notée* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.



Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition 3.2 *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

- $\boxed{\exp(\ln x) = x \textit{ pour tout } x > 0}$ *et* $\boxed{\ln(\exp x) = x \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$
- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp = +\infty$.
- *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

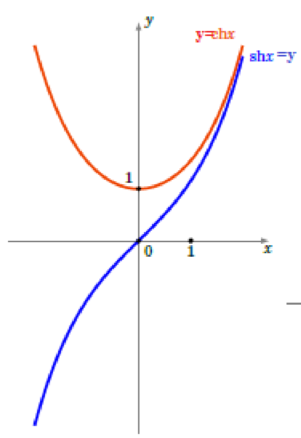
4 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

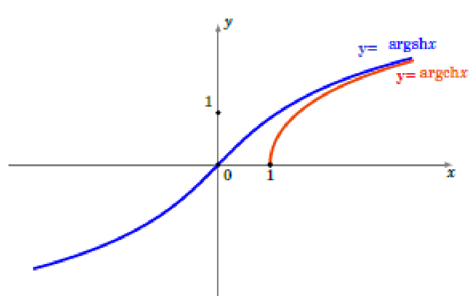
4.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est :

$$\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La restriction $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection.
Sa fonction réciproque est $Argch : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$.(Argument cosinus hyperbolique)





4.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est :

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$, c'est donc une bijection.
la fonction réciproque est $Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.(Argument sinus hyperbolique)

Proposition 4.1
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$
- *$Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue.*
- *$Argsh$ est dérivable et $Argsh'\ x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.*
- $Argsh\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Preuve 4.1

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] = 1.$$

- $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$.
- *Car c'est la réciproque de* $\sinh$.
- *Comme la fonction $x \mapsto \sinh' x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $Argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\sinh(Argsh\ x) = x$:*

$$Argsh'\ x = \frac{1}{\cosh(Argsh\ x)} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(Argsh\ x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- *Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ alors*

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = Argsh'\ x$$

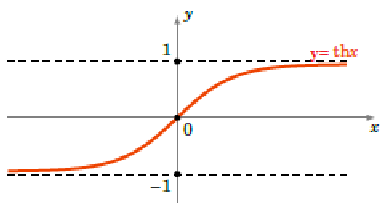
Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $Argsh 0 = 0$ (car $\sinh 0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Argsh\ x$.

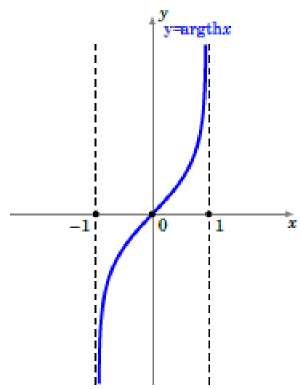
4.3 Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la tangente hyperbolique est :

$$\boxed{\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}}$$

La fonction $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est une bijection, on note $Argth :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.





4.4 Trigonométrie hyperbolique

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b$$
$$\cosh(2a) = \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2\,\cosh^2 a - 1 = 1 + 2\,\sinh^2 a$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cdot \cosh b + \sinh b \cdot \cosh a$$
$$\sinh(2a) = 2\,\sinh a \cdot \cosh a$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}$$

$$\begin{aligned}
\cosh' x &= \sinh x \\
\sinh' x &= \cosh x \\
\tanh' x &= 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Argch' \ x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1) \\
Argsh' \ x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\
Argth' \ x &= \frac{1}{1 - x^2} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Argch \ x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (x \geq 1) \\
Argshx &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \\
Argth \ x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

Exercice 4.1

Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\arccos x), \quad \cos(\arcsin x).$$

Exercice 4.2

Résoudre les équation suivantes :

$$\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}, \quad \arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4},$$

Exercice 4.3

Vérifier

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

(sgn(x) : Signe de x , positive ou négative)

Solutions Des Exercices

Exercices du Chapitre I

Exercice 1.1

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x+1)$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$.

2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$.

3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y \leq 0$.

4. (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$.

Exercice 1.2

1. $\Longleftarrow$

2. $\Longleftrightarrow$

3. $\Longrightarrow$

Exercice 1.3
Rédigeons la deuxiéme égalité. Soit $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante:

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- $\mathcal{P}_1$ est vraie $(1 = 1)$.
- Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

  Ce qui prouve $\mathcal{P}_{n+1}$.

- Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercices du Chapitre II

Exercice 2.1
Nous allons démontrer l'assertion 1. de deux maniéres différentes.

1. Tout d'abord de façon “directe". Nous supposons que A et B sont telles que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.

   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.

2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons monter que $A \cap B \neq A \cup B$.

   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Exercice 2.2

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in \complement_E A \text{ et } x \in \complement_E B \\ &\iff x \in \complement_E A \cap \complement_E B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cap B) &\iff x \notin A \cap B \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \in \complement_E A \text{ ou } x \in \complement_E \\ &\iff x \in \complement_E A \cup \complement_E B. \end{aligned}$$

Exercice 2.3

Montrons quelques assertions. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de mêeme $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où$y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Longleftrightarrow f(x) \in F \setminus A \\ &\Longleftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \text{ car } f^{-1}(A) = \{x \in E \ / \ f(x) \in A\} \\ &\Longleftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Exercice 2.4

1. Soit z, z', z'' des complexes quelconques.
   - Reflexivité : $z\mathcal{R}z$ car $|z| = |z|$.
   - Symétrie : $z\mathcal{R}z' \Rightarrow z'\mathcal{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
   - Transitivité : $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathcal{R}z''$.
2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$.

$$\mathcal{C} = \{|z|e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2.5
Si $f \circ g = g \circ f$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Nous allons montrer que c'est faux, un contre-exemple. Prenons $x = 0$. Alors $f \circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g \circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$

Exercice 2.6

1. f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent: en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$

qui n'a pas de solutions réelles.

2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1, 1]$.

Exercice 2.7

- f est injective :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ où } x, y \in [1, +\infty[\text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Exercices du Chapitre III

Exercice 3.1
Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguées":

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})((\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}))}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}
\end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.

Distinguons plusieurs pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n} et donc $f(x)$ tend vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Exercice 3.2

Soit $x_0 \neq 0$, alors la fonction f est continue en x_0, car elle s'exprime sous la forme d'un quotient de fonctions continues où le dénominateur ne s'annule pas en x_0. Reste à étudier la continuité en 0. Mais

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

Exercice 3.3

1. La fonction en définie sur $\mathbb{R}^*$. Et elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

$$\lim_{x \to 0} \sin x \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

donc le prolongement par continuité définie par $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0. f est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $g(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Donc si les objets suivants existent : la limie de f en 0 est égale à la valeur de g' en 0. Calculons g' sur $\mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \Big(\ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big)' = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Quand $x \to 0$ alors le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 2, donc $g'(x)$ tend vers 0. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Donc le prolongement par continuité définie par $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1 + x - 2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1 + x}{(1-x)(1+x)} == \frac{-1}{(1+x)}.$$

Donc f a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En -1 la fonction f ne peut être prolongée continuement, car en -1, f n'admet de limite finie.
Donc f n'admet pas un prolemngement par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.4

1. Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x \neq \frac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2+3x) \times (5-2x) \geq 0$, soit $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$.

2. Il faut $x^2 - 2\,x - 5 \geq 0$, soit $x \in]-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, +\infty[$.

3. Il faut $4x+3>0$ soit $x > -\frac{3}{4}$, l'ensemble de définition étant $]-\frac{3}{4}, +\infty[$.

Exercice 3.5

1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x=0$. Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement:

$$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = x\cos\frac{1}{x}.$$

   Mais $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos 1/x| \leq 1$ (ou $\cos 1/x$ est bornée au voisinage de 0 et la fonction x tend vers 0). Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$.

2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x=0$ est :

$$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x}\sin\frac{1}{x}$$

   Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

Exercices du Chapitre IV

Exercice 4.1

1. $\sin^2 y = 1-\cos^2 y$ donc $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Donc $\sin \arccos x = \pm\sqrt{1-\cos^2 \arccos x} = \pm\sqrt{1-x^2}$ et comme $\arccos x \geq 0$ on a $\sin \arccos x = +\sqrt{1-x^2}$.

2. De la même manière
   $\cos \arcsin x = +\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 4.2

1. En prenant le sinus de l'équation $\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$ on obtient $x = \sin(\arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5})$, donc $x = \frac{2}{5} \cos \arcsin \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cos \arcsin \frac{2}{5}$. En utilisant la formule $\cos \arcsin x = +\sqrt{1-x^2}$. On obtient $x = \frac{2}{5}\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{8}{25} + \frac{3\sqrt{21}}{25}$.

2. En prenant le cosinus de l'équation $\arccos x = 2\arccos \frac{3}{4}$ on obtient $x = \cos(2\arccos \frac{3}{4})$ on utilise la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ et on arrive à : $x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$.

Exercice 4.3

1. Soit f la fonction sur $[-1, 1]$ définie par $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ alors $f'(x) = 0$ pour $x \in]-1, 1[$ donc f est une fonction constante sur $[-1, 1]$ Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, la fonction est définie sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On a $g'(x) = 0$ donc g est constante sur chacun des ses intervalle de définition. $g(x) = c_1$ sur $]-\infty, 0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0, +\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

Bibliography

[1] Hitta Amara *: Cours Algebre et Analyse I ,LMD : DEUG I-MI/ST* 2008-2009

[2] Mohamed Mehabali *: Mathématique 1, Fonction d'une variable réelle. Première année Universitaire* 2011 .

[3] M. Mechab *: Cours d'algèbre-LMD Sciences et Techniques.*

[4] Cours de mathématiques Première année *: exo7* .

[5] Serie Ramis, *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence Cours complet et 270 exercices corrigés* ,(2007).

[6] Marc Hindry *:Cours mathématiques première année (L1)* .

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

C.U Relizane . Ahmed Zabana

المركز الجامعي لغليزان

Institut des Sciences et Technologies

1^{er} Année ST

Cours Maths 1 Et Exercices Avec Solutions

Dr Djebbar Samir

ssamirdjebbar@yahoo.fr

Année Universitaire 2017/2018