Corrigé type Examen Final M1

Exo 1 6pts

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0 \; 2[$

1°) Montrons que f est bijective :

f bijective $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$ 0,5

a/ Etude de l'injection :

$\forall (x,x') \in \mathbb{R}_+^2 : f(x) = f(x') \overset{?}{\Longrightarrow} x = x'$

$f(x) = f(x') \Rightarrow \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \dfrac{2x'^2}{1+x'^2} \Rightarrow 2x'^2(1+x^2) = 2x^2(1+x'^2)$

$\Rightarrow 2x'^2 + \cancel{2x'^2x^2} = 2x^2 + \cancel{2x^2x'^2} \Rightarrow \cancel{2}x'^2 = \cancel{2}x^2$

$\Rightarrow x^2 - x'^2 = 0 \Rightarrow (x-x')(x+x') = 0$

$\begin{cases} x - x' = 0 \Rightarrow x = x' \\ (x+x') \neq 0 \quad \text{car } (x,x') \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases}$ 2

donc f est injective.

b/ Etude de la surjection :

$\forall y \in [0, 2[\; \overset{?}{\exists} x \in \mathbb{R}_+ \; / \; (y = f(x))$ 1,5

$y = f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y = 2x^2 \Rightarrow x^2y + y = 2x^2$

$\Rightarrow (y-2)x^2 = -y \Rightarrow x^2 = \dfrac{-y}{y-2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{-y}{y-2}} \in \mathbb{R}_+$

donc f est surjective.

de a/ et b/. On déduit que f est bijective.

2°/ Détermination de f^{-1}.

Puisque f est bijective donc elle admet une application inverse f^{-1} bijective aussi. 1

D'après la question 1-b/ $\Rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{-y}{y-2}}$

3°/ $f^{-1}(0) = \sqrt{\frac{0}{-2}} = 0$; $f^{-1}(1) = \sqrt{\frac{-1}{+1-2}} = 1$ 0,5 0,5

Exo 2 :

On a : $\forall x,y \in]-1,1[$, $x * y = \frac{x+y}{1+x.y}$

$(]-1,1[, *)$ Groupe Abelien $\Leftrightarrow$ 0,5
* Commutative
* Associative
* existance de l'élément neutre
* Chaque élément est symetrisable

1°/ La Commutativité :

$\forall x,y \in]-1,1[$: $x * y \overset{?}{=} y * x$. 1

$x * y = \frac{x+y}{1+x.y} = \frac{y+x}{1+y.x} = y * x$ [Car + et x sont Commutative de $\mathbb{R}$]

2°/ L'Associativité :

$\forall x,y,z \in]-1,1[$: $(x*y)*z \overset{?}{=} x*(y*z)$

P2

$$(x*y)*z) = \frac{(x*y)+z}{1+(x*y)\cdot z} = \frac{\frac{(x+y)}{1+xy}+z}{1+\frac{(x+y)}{1+x\cdot y}\cdot z}$$

$$= \frac{(x+y)+z(1+xy)}{1+x\cdot y+(x+y)\cdot z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad (1)$$

$$x*(y*z) = \frac{x+(y*z)}{1+x\cdot(y*z)} = \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)}$$

$$= \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz} \quad \ldots(2)$$

1,5

$(1)=(2)$ donc $*$ est Associative.

3°) Existance de l'élément neutre :

Soit e l'élément neutre de $]-1,1[$ relativement à $*$

$\forall x \in]-1,1[\; : \; x*e = e*x = x$.

$$x*e = \frac{x+e}{1+x\cdot e} = x \Rightarrow \cancel{x}+e = \cancel{x}+x^2\cdot e$$

1,5

$(x^2-1)\cdot e = 0 \Rightarrow e = 0$ car $(x^2-1) \neq 0$.

4°) L'élément Symetrique :

Soit x' le symetrique de x.

$$\forall x \in]-1,1[\; : \; x*x' = x'*x = 0 \Rightarrow \frac{x+x'}{1+x\cdot x'} = 0$$

$\Rightarrow x + x' = 0 \Rightarrow x' = -x$ (1,5)

de ce qui précède on déduit que $(]-1,1[, *)$ est un Groupe Abelien.

Exo 3 : 6pts

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1°) Etude de la Continuité sur $\mathbb{R}$.

pour $x \neq 0$ $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ est Continue et l'exponentielle est Continue sur $\mathbb{R}$ donc f est Continue sur $\mathbb{R}^*$

au point $x = 0$ (1)

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$

donc f est Continue en 0. (1)

2°/ Calcul de $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-1/x^2} = (-x^{-2})' \cdot e^{-1/x^2}$

$= -(-2) \cdot x^{-3} e^{-1/x^2} = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-1/x^2}$ (1,5)

3°) Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$

On pose $u = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2u^3 \cdot e^{-u^2}$ (1,5)

Lorsque $x \to 0^{\pm}$, $-u^2 \longrightarrow -\infty$ donc $e^{-u^2} \longrightarrow 0$

alors $2u^3 \xrightarrow{\pm} \pm\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée ; mais l'exponentielle l'emporte sur les polynômes

donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{u \to \pm\infty} 2u^3 \cdot e^{-u^2} = 0$

$f'(x)$ admet une limite en 0 et f est continue en 0

donc f est de classe C^1 en 0, ce qui signifie que f

est dérivable et que $f'(0) = 0$

1

Question de Cours :

les types de raisonnement mathématique :

1°) Méthode directe

2°) Raisonnement par l'Absurde

3°) 〃 〃 Contraposition

4°) 〃 〃 Contre exemple

5°) 〃 〃 Récurrence

2

PT