Examen de Mécanique Rationnelle

2018-2019

Question de Cours : (02pts)

On donne deux vecteurs dans l' espace $\vec{A}$ et $\vec{B}$

-Demontrer que le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ est commutatif (تبديلي).

Exercice N :0 1 (06pts)

On donne les trois vecteur suivants :

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \qquad \vec{B} = \vec{i} - 4\vec{k}, \qquad \vec{C} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

1- Calculer le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$

2- Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{C}$

3- Les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{C}$ sont-ils lineairement independants ?

Exercice N : 02 (06pts)

La figure ci-dessous représente un corps solide qui est la poutre ABC encastrée dans un mur (fig.1).

1- Déterminer la réaction du mur sur la poutre

2-Calculer le moment d'encastrement **M**

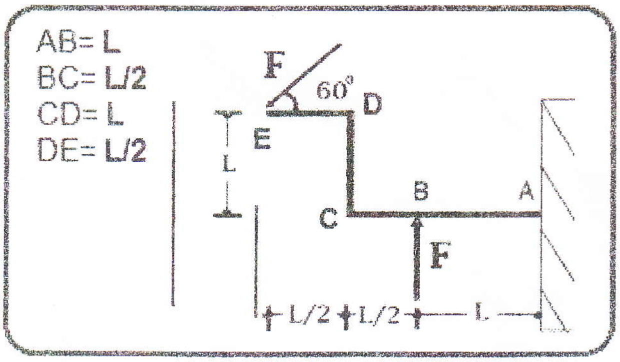


Figure 1

Exercice N :03 (06pts)

Il s'agit d un radar militaire simulé a un demi cylindre creux de rayon **R** et de longueur **L** (fig.2)

-Calculer le moment d inertie de ce radar par rapport à l axe **Oz**

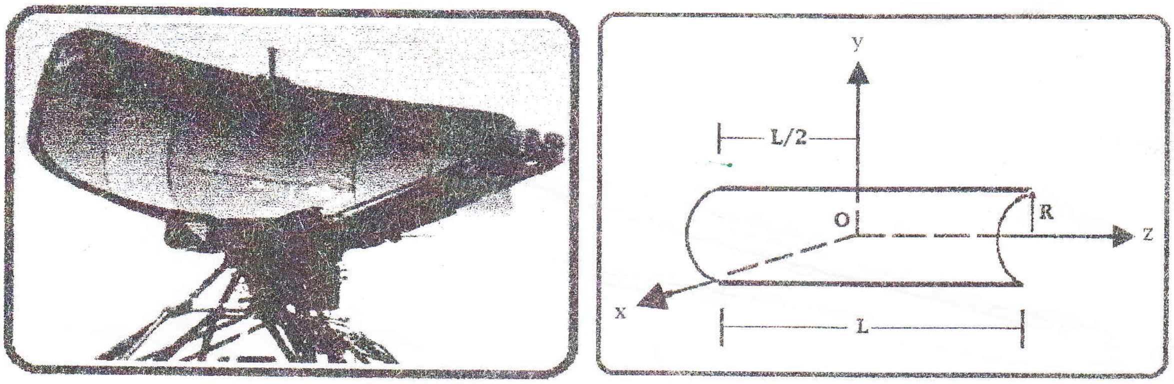


Figure2

Correction d'Examen

M.R 2ème Année (B)

Ex. Question de Cours (2pts)

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ est commutatif

1ère méth.

on a :

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\vec{A},\vec{B}) = |\vec{B}||\vec{A}|\cos(\vec{B},\vec{A})$ (0,5) (0,5)

(car $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$)

$= \vec{B}\cdot\vec{A}$ (0,5)

donc $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ (Le Produit scalaire est commutatif). (0,5)

ou **2ème méth**

Soient $\vec{A}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$, donc :

$\vec{A}\cdot\vec{B} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$ (0,5)

(0,5) $= x_B x_A + y_B y_A + z_B z_A = \vec{B}\cdot\vec{A}$ (0,5)

Alors : $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ (Le P.S est commutatif).

(0,5)

Exercice N: 01 (06 pts)

on a :

$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} - 4\vec{k}$

$\vec{C} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

1). Produit scalaire $\vec{A}\cdot\vec{B}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 2.1 + 1.0 + (-1)(-4) = 6$ (0,5) (01) (0,5)

2). Produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{C}$:

$$\vec{A} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$ 0,5

$$= [1(-2)-(-1)2]\,\vec{i} - [2(-2)-(-1)(4)]\,\vec{j} + [2.2-1.4]\,\vec{k} = \vec{0}$$ 0,5

$\vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{0}$. 1

3). $\vec{A}$ et $\vec{C}$ sont-ils linéairement indépendants

1ère méth

D'après la question (2), on a trouvé

$\vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{0}$ 0,5 $\Rightarrow$ $\vec{A} \parallel \vec{C}$ 0,5 donc les deux vecteur sont linéairement dépendants 1 (colinéaires)

2ème méth.

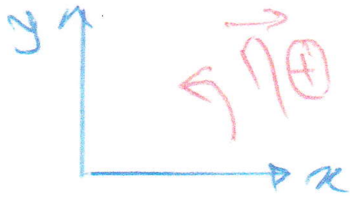
$\vec{A}$ et $\vec{C}$ sont linéairement dépendants si $\vec{A} = \lambda \vec{C}$.

$\lambda = ?$ on a $|\vec{A}| = \lambda |\vec{C}|$ 0,5

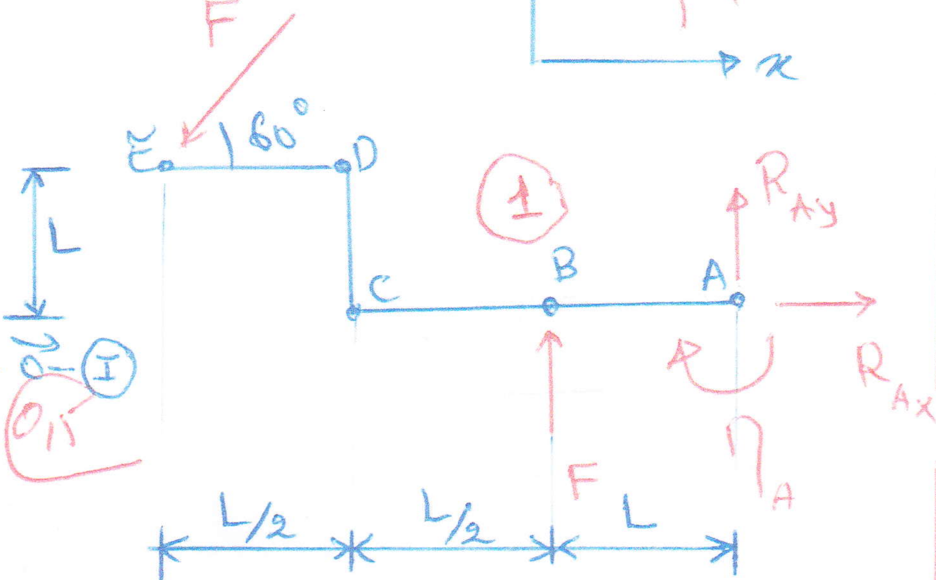
$$\Rightarrow \lambda = \frac{|\vec{A}|}{|\vec{C}|} = \frac{\sqrt{2^2+(1)^2+(-1)^2}}{\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{1}{2}$$ 0,5

donc : $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{C}$ càd les deux vect. $\vec{A}$ et $\vec{C}$ sont linéairement dépendants (ou colinéaires) 1

Exercice N°02 (06 pts)



1) Réaction : R_A



on a :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_E + \vec{F}_B + \vec{R}_A = \vec{0} \quad \text{(I)}$$

0,5

Composants de force

* $\vec{F}_E \begin{bmatrix} -F\cos 60° \\ -F\sin 60° \end{bmatrix}$ 0,5 * $\vec{F}_B \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$ 0,5 * $\vec{R}_A \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{bmatrix}$ 0,5

(I) $\rightarrow$
- Ox : $-F\cos 60° + R_{Ax} = 0 \rightarrow R_{Ax} = F\cos 60°$ ... (A) 0,5
- Oy : $-F\sin 60° + F + R_{Ay} = 0 \rightarrow R_{Ay} = F(\sin 60° - 1)$ ... (B) 0,5

donc, $R = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = F\sqrt{2(1-\sin 60°)}$

$$R = F\sqrt{2(1-\sin 60°)}$$

2) Moment M_A (moment d'encastrement)

on a : $\sum \vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0} \leftrightarrow \vec{M}_A(\vec{F}_E) + \vec{M}_A(\vec{F}_B) + \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{M}_A = \vec{0}$ (II)

$\vec{0}$

0,5

* $\vec{M}_A(\vec{F}_E) = ?$

on a : $\vec{M}_A(\vec{F}_E) = \vec{M}_A(\vec{F}_{Ex}) + \vec{M}_A(\vec{F}_{Ey})$

• $\vec{M}_A(\vec{F}_{Ex}) = F\cos60^\circ L\vec{k}$ ... ⓐ

• $\vec{M}_A(\vec{F}_{Ey}) = F_y\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+L\right)\vec{k} = 2F\sin60^\circ L\vec{k}$ .. ⓑ (0,5)

* $\vec{M}_A(\vec{F}_B) = ?$

$\vec{M}_A(\vec{F}_B) = -FL\vec{k}$ .. ⓒ (0,25)

* $\vec{M}_A = -M_A\vec{k}$ ... ⓓ (0,25)

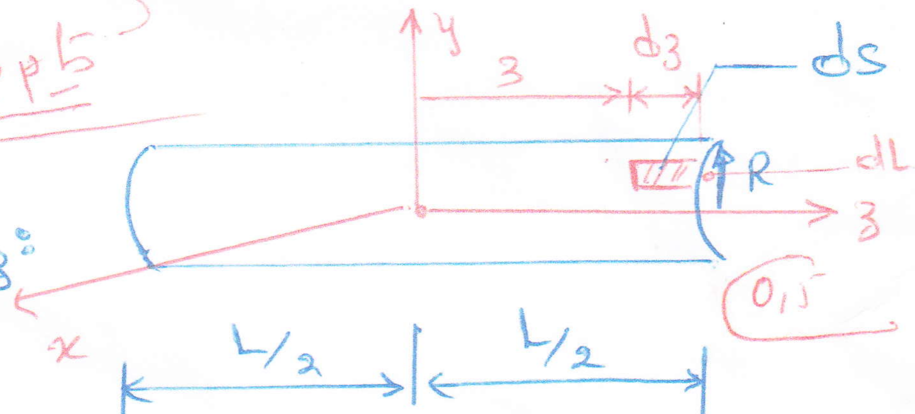
ⓐ, ⓑ, ⓒ et ⓓ dans ⓕ donne:

$$F\cos60^\circ L + 2F\sin60^\circ L - FL - M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_A = FL\left[\cos60^\circ + 2\sin60^\circ - 1\right]$$ (0,5)

Exercice III (06 pts)

- Moment d'inertie I_{Oz}:



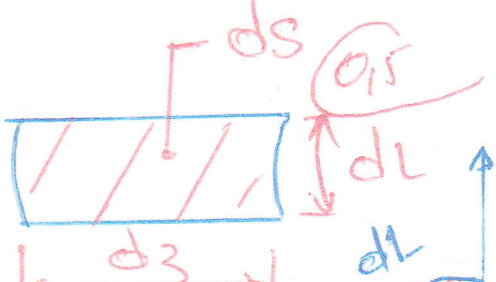
on a:

$$I_{Oz} = \int_{(m)} (x^2+y^2)\,dm \quad \text{— (I)}$$ (0,5)

, avec $dm = \sigma\, ds$ ... ⓐ

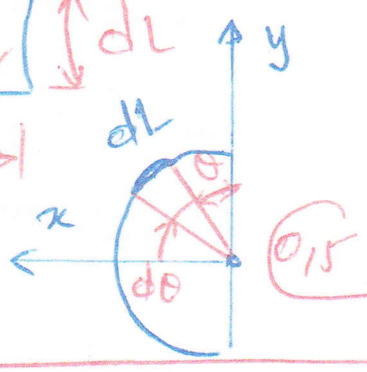
$ds = ?$

$ds = dz \cdot dL$ (0,5)



avec:

$dL = R\,d\theta$



donc: $ds = R\,d\theta\,dz$ ... ⓑ (0,5)

on sait que : $x^2+y^2=R^2$ ... ⓒ (0,5)

ⓐ, ⓑ et ⓒ ds ⓘ donne :

$$I_{Oz} = \iint R^2 \cdot G \cdot R \, d\theta \, dz .$$

$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$ ou $\left(0 \leq z \leq \frac{L}{2}\right) \times 2$ (0,25)

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \times 2$. (0,25)

donc :

$$I_{Oz} = G R^3 \, 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \; 2 \int_0^{L/2} dz \;(0,5)\; = 4 G R^3 \left[\theta\right]_0^{\pi/2} \;(0,5)\; \left[z\right]_0^{L/2}$$

$$I_{Oz} = G R^3 \pi L \;(0,5)$$

on sait que $M = G \cdot S = G \cdot \pi R L$

donc : $\underline{\underline{I_{Oz} = M R^2}}$ (0,5)