UNIVERSITE BATNA 2

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE SCIENCE TECHNOLOGIQUE

Première année Socle Commun ST

Semestre : 02	Contrôle de Maths2	Date : 06/06/2023
ملاحظة : ممنوع استعمال الآلة الحاسبة أو الهاتف المحمول		

Exo No.01 : (10 points)

Soit le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

Partie I :

1)Ecrire le système sous la forme A.X= B

2)Calculer le déterminant de la matrice A

Partie II :

Résoudre le système d'équation par la méthode **de GAUSS**

Exo No.02 : **(10 points)**

1)Pour tout n∈N, on pose $Kn = \int_0^1 t^n e^t dt$

En utilisant la formule d'intégration par parties, Montrer que :

$$(\forall n \in N): K_{n+1} + (n+1)K_n = e$$

2) a)Vérifier que $(\forall x \in R - \{0; -1\}: \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

b)En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^e \frac{Ln\, x}{(1+x)^2} dx$$

Bonne Chance

Exo 1 : [illegible]

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

Partie I

① Le système peut s'écrire $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$ (2 points)

② le déterminant :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & +1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}^{\det 1} - \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}^{\det 2} + 0\,|\det 3| - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}_{\det 4}$$

$$= \det_1 - \det_2 + \det_3 - \det_4$$

$$= 9 - 3 + 0 - 15 = 9 - 18 = -9$$ (1 point)

Partie 2 : Méthode de Gauss :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1^0 \\ L_2^0 \\ L_3^0 \\ L_4^0 \end{matrix}$$ (1)

$L_2^1 \leftarrow L_2^0 - 2L_1^0$

$L_3^1 \leftarrow L_3^0 + L_1^0$

$L_4^1 \leftarrow L_4^0 - 3L_1^0$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1^1 \\ L_2^1 \\ L_3^1 \quad L_3^2 \leftarrow L_3^1 + 3L_2^1 \quad 1 \\ L_4^1 \quad L_4^2 \leftarrow L_4^1 - 4L_2^1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1^2 \; 1 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_4^2 \end{array}$$

permutation de

$L_3^2 \longleftrightarrow L_4^2$ 1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad 1$$

$-3x_4 = -3 \Rightarrow x_4 = 1$

$3x_3 + 3x_4 = 3 \Rightarrow 3x_3 + 3 = 3 \Rightarrow 3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$-x_2 - x_3 - x_4 = -3 \Rightarrow x_2 = 3 - 0 - 1 = 2$

$x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - 2 - 1 = -1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

3) [illegible] $K_{n+1} + (n+1)K_n = e$

Soit $K_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} . e^t \, dt$ $\left\{\begin{array}{l} \text{on pose :} \\ u(t) = t^{n+1} \Rightarrow du = (n+1)t^n \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = \int dv = e^t \end{array}\right.$

alors

$$K_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} . e^t \, dt$$

$$= e^t . t^{n+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n . e^t \, dt = e^t . t^{n+1} - (n+1) \int t^n e^t \, dt$$

$$= \left[e^t . t^{n+1} \right]_0^1 - (n+1) K_n$$

$$K_{n+1} = e . 1 - e^0 . 0 - (n+1) K_n = e - (n+1) K_n$$

$$\boxed{K_{n+1} + (n+1) K_n = e} \quad (5 \text{ points})$$

2) 1) vérifions $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \; (2 \text{ pts})$$

2) $I = \int_1^e \dfrac{\ln x}{(1+x)^2} dx$ on peut écrire $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2} = \ln x \times \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$u(x) = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx$ (1) $\qquad \dfrac{f'}{f^2} \to -\dfrac{1}{f}$

$dv(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow v(x) = \dfrac{-1}{1+x}$

$$I = -\frac{1}{1+x} . \ln x - \int -\frac{1}{x(1+x)} dx$$

$$= \frac{-\ln x}{1+x} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(1+x)}{x+1} = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln|x| - \ln|x+1| + c$$

$$= -\frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^e + \ln|x| \Big|_1^e - \ln|x+1| \Big|_1^e \; (1)$$

$$= -\frac{1}{1+e} + 1 - \ln|e+1| + \ln 2 \; (1)$$