Université Batna 2
Socle Commun Sciences et Technologies

Année Universitaire 2021/2022

Corrigé type Examen Final P2 2021/2022

Questions de cours : /6

1. Citer les lois de **Kirchhoff.**

Les deux lois de Kirchhoff sont :

- La **loi des nœuds :** la somme algébrique des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme algébrique des intensités des courants qui en sortent.

$$\sum_{entrants} I = \sum_{Sortants} I$$

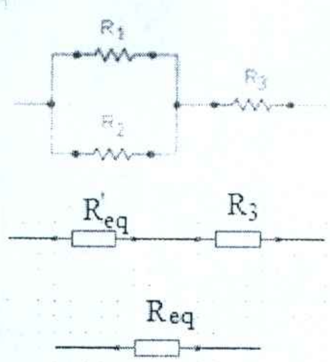
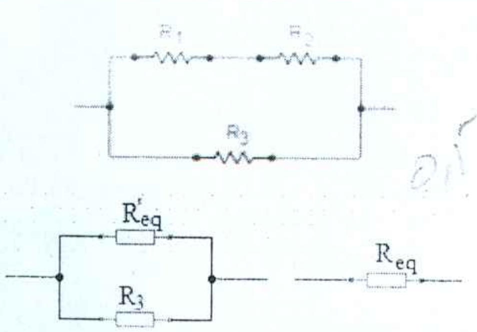
0,75

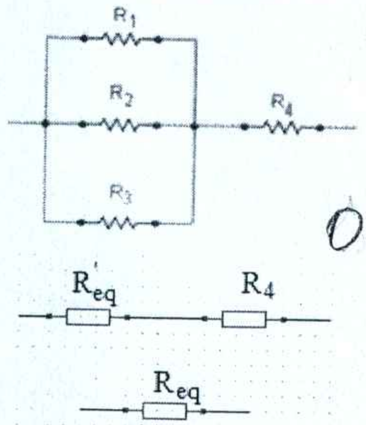
- La **loi des mailles :** dans une maille d'un réseau électrique, la somme des tensions le long de cette maille est toujours nulle.

$$\sum_{K=1}^{n} U_K = 0$$

0,75

2. Soit le montage électrique des résistances suivants, représenter et exprimer la résistance équivalente au montage

 0,5	$R_{eq} = R'_{eq} + R_3$ $R_1 et\ R_2$ en parallèle $\Rightarrow \frac{1}{R'_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ $\Rightarrow R'_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ 1 $R'_{eq} et\ R_3$ en série $\Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\ (\Omega)$
 0,5	$R_{eq} = R'_{eq} + R_3$ $R_1 et\ R_2$ en série $\Rightarrow R'_{eq} = R_1 + R_2$ $R'_{eq} et\ R_3$ en parallèle $\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R'_{eq}} + \frac{1}{R_3} = \frac{R'_{eq} + R_3}{R'_{eq} R_3}$ $\Rightarrow R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3}\ (\Omega)$ 1



0,5

$$R_{eq} = R'_{eq} + R_3$$

R_1, R_2 et R_3 en parallèle $\Rightarrow \dfrac{1}{R'_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R'_{eq}} = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$$

1

$$\Rightarrow R'_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$

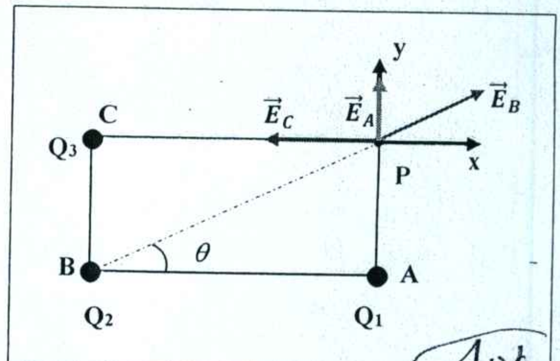
R'_{eq} et R_4 en série $\Rightarrow R_{eq} = \dfrac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} + R_4\ (\Omega)$

Exercice 1 : /8

Trois charges ponctuelles sont placées aux coins d'un rectangle, de largeur $CB = PA = d$ et de longueur $CP = AB = 2d$, comme le montre la figure ci-contre.

$$Q_1 = Q,\ Q_2 = 2Q \text{ et } Q_3 = -2Q\ (Q > 0).$$

1. Exprimer le champ résultant au point P ?



1pt

0,5pt $\quad \vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C \quad$ et $E = K\dfrac{|Q|}{r^2}$ 0,5

D'après les vecteurs, on a :

$$\begin{cases} \vec{E}_A = E_A\vec{j} \\ \vec{E}_B = E_B\cos\theta\ \vec{i} + E_B\sin\theta\ \vec{j} \\ \vec{E}_C = -E_C\vec{i} \end{cases}$$

Aussi

$$\begin{cases} E_A = \dfrac{K\,|Q_A|}{AP^2} = \dfrac{K\,Q}{d^2} \\ E_B = \dfrac{K\,|Q_B|}{BP^2} = \dfrac{2\,K\,Q}{5\,d^2} \\ E_C = \dfrac{K\,|Q_C|}{CP^2} = \dfrac{2K\,Q}{4\,d^2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} AP^2 = d^2 \quad \text{et} \quad CP^2 = 4\,d^2 \\ BP^2 = AP^2 + BA^2 = d^2 + 4\,d^2 = 5\,d^2 \end{cases}$$

$$\text{Du triangle (BAP)} \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{BA}{BP} = \dfrac{2d}{\sqrt{5}d} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{d}{\sqrt{5}d} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{K\,Q}{d^2}\vec{j} + \left(\frac{2\,K\,Q}{5\,d^2}\frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{i} + \frac{2\,K\,Q}{5\,d^2}\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{j}\right) - \frac{2K\,Q}{4\,d^2}\vec{i} = \left(\frac{2\,K\,Q}{5\,d^2}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2K\,Q}{4\,d^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{K\,Q}{d^2} + \frac{2\,K\,Q}{5\,d^2}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{2\,K\,Q}{d^2}\left[\left(\frac{2}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\vec{\jmath}\right] = \frac{2\,K\,Q}{d^2}(-0{,}07\,\vec{\imath} + 0{,}59\,\vec{\jmath}) \quad \left[\frac{Volt}{m}\right]$$ 1

Son module :

$$E = \frac{2\,K\,Q}{d^2}\sqrt{(-0{,}07)^2 + (0{,}59)^2} \Rightarrow E = \frac{2K\,Q}{d^2}(0{,}59) \quad \left[\frac{Volt}{m}\right]$$ 1

2. Exprimer le potentiel électrostatique au point P ?

0,5 $$V_P = V_A + V_B + V_C \quad \text{et} \quad V = \frac{K\,Q}{r}$$ 0,5

$$\begin{cases} V_A = \dfrac{K\,Q}{d} \\ V_B = \dfrac{2\,K\,Q}{\sqrt{5}\,d} \\ V_C = -\dfrac{2K\,Q}{2\,d} \end{cases} \Rightarrow V_P = \frac{K\,Q}{d} + \frac{2\,K\,Q}{\sqrt{5}\,d} - \frac{2K\,Q}{2\,d} = \frac{2\,K\,Q}{\sqrt{5}\,d} \quad [Volt]$$ 1

3. Déduire l'expression de la force appliquée sur une charge $Q_4 = -Q$ placée en P.

$$\begin{cases} \vec{F} = Q_4\vec{E} = \dfrac{2\,K\,Q^2}{d^2}(0{,}07\,\vec{\imath} - 0{,}59\,\vec{\jmath}) \\ \|\vec{F}\| = |Q_4|\|\vec{E}\| = \dfrac{2\,K\,Q^2}{d^2}\,(0{,}59) \end{cases} \quad [N]$$ 0,5 0,5

4. Ou doit-on placer une charge $Q_5 = 2Q$ pour que la force résultante appliquée sur Q_4 soit nulle.

Soit M est le point où on place la charge Q_5, on pose la distance entre les deux charges Q_4 et Q_5 est :

$$\overrightarrow{MP} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad MP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{F}_M = \vec{F}_{M/P} = \frac{2\,K\,Q^2}{r^2}\overrightarrow{u_r} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{D'où :} \quad \vec{F}_M = 2\,K\,Q^2\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{F}_M + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_M = -\vec{F}$$

$$\Rightarrow 2\,K\,Q^2\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{2\,K\,Q^2}{d^2}(0{,}07\,\vec{\imath} - 0{,}59\,\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{r^3}{d^2}(-0{,}07\,\vec{\imath} + 0{,}59\,\vec{\jmath})$$

$$\text{Aussi :} \quad \frac{\|\vec{r}\|}{r^3} = \frac{0{,}59}{d^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{0{,}59}{d^2} \Rightarrow r^2 = \frac{d^2}{0{,}59} \Rightarrow r = \frac{d}{0{,}77} \quad (m)$$

$$\text{Donc :} \ \vec{r} = \frac{\left(\frac{d}{0{,}77}\right)^3}{d^2}(-0{,}07\,\vec{\imath} + 0{,}59\,\vec{\jmath}) \Rightarrow \vec{r} = d(-0{,}15\,\vec{\imath} + 1{,}29\,\vec{\jmath})$$ 1

Université Batna 2 **Année Universitaire 2021/2022**

Socle Commun Sciences et Technologies

Exercice 2 : /6

On considère une sphère creuse de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2, chargée en volume avec une densité uniforme $\rho > 0$. Le centre O porte une charge ponctuelle $Q_0 > 0$.

1. Déterminer la charge totale Q de cette répartition.

$$Q = Q_0 + Q'$$

Q': Est la charge dans la sphère creuse.

On utilise la définition de la densité ρ :

$$\rho = \frac{dQ'}{dV} \Rightarrow dQ' = \rho\, dV \Rightarrow Q' = \int dQ' = \rho \iiint dV \quad \text{(densité uniforme)}$$

$$dV = 4\,\pi\, r^2\, dr \Rightarrow Q' = 4\,\pi\,\rho \int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr = 4\,\pi\,\rho \left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,[R_2^3 - R_1^3]$$

$$\Rightarrow Q = Q_0 + Q' = Q_0 + \frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,[R_2^3 - R_1^3]\ [C]$$ 1

2. En utilisant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace pour une distribution volumique de charge répartie uniformément entre ces deux sphères.

En utilisant le théorème de Gauss :

$$\phi = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ 0,5

$$\phi = E\, S_G = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

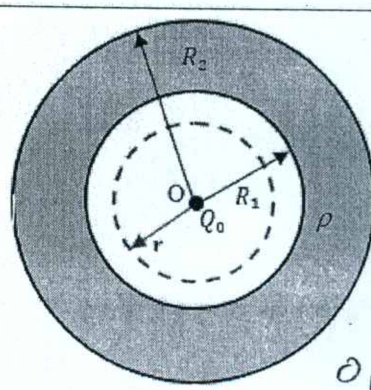
En coordonnées sphériques, le champ électrique $\vec{E}$ est radial : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

La surface de Gauss est une sphère de rayon r et de surface $S_G = 4\,\pi\, r^2$

1er cas $r < R_1$

$$\phi = E\, S_G = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_G = 4\,\pi\, r^2 \\ \sum Q_{int} = Q_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0 S_G} = \dfrac{Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2} & \left[\dfrac{Volt}{m}\right] \\ \vec{E} = \dfrac{Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r \end{cases}$$ 1



0,5

2ème cas $R_1 < r < R_2$

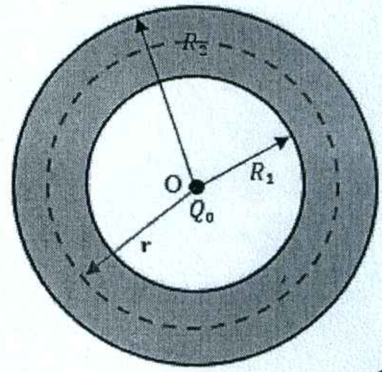
$$\phi = E\,S_G = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_G = 4\,\pi\,r^2 \\ \sum Q_{int} = Q_0 + \iiint \rho\, dV \end{cases}$$

$$\iiint \rho\, dV = 4\,\pi\,\rho \int_{R_1}^{r} r^2\, dr = 4\,\pi\,\rho \left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_1}^{r} = \frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,[r^3 - R_1^3]$$

$$\Rightarrow \sum Q_{int} = Q_0 + \frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,[r^3 - R_1^3]$$

$$\begin{cases} E = \dfrac{Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{[r^3 - R_1^3]}{r^2} \\ \vec{E} = \left(\dfrac{Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r - \dfrac{R_1^3}{r^2}\right]\right)\vec{e}_r \end{cases} \qquad \left[\frac{Volt}{m}\right]$$

1



0,5

3ème cas $r > R_2$

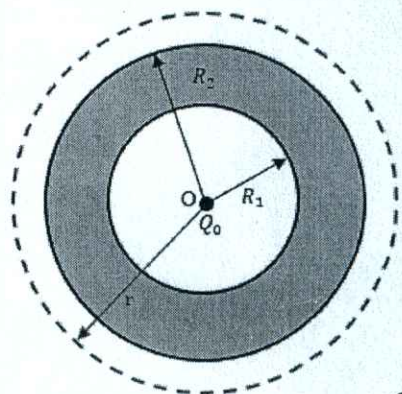
$$\phi = E\,S_G = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_G = 4\,\pi\,r^2 \\ \sum Q_{int} = Q_0 + \iiint \rho\, dV \end{cases}$$

$$\iiint \rho\, dV = Q' = 4\,\pi\,\rho \int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr = \frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,[R_2^3 - R_1^3]$$

$$\Rightarrow \sum Q_{int} = Q_0 + \frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,[R_2^3 - R_1^3]$$

1

$$\begin{cases} E = \dfrac{Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{[R_2^3 - R_1^3]}{r^2} \\ \vec{E} = \left(\dfrac{Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{[R_2^3 - R_1^3]}{r^2}\right)\vec{e}_r \end{cases} \qquad \left[\frac{Volt}{m}\right]$$



0,5