UNIVERSITE MOUSTAFA BEN BOULAID BATNA
SOCLE COMMUN EN SCIENCES ET TECHNIQUE
1ère ANNÉE LMD ST

10/02/2022
Matière: M1.
Durée : 1h30mn.

EXAMEN FINAL

EXERCICE N°01 (6 pts)

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$, On définit la relation binaire $\Re$ par :

$$x \Re y \Leftrightarrow x - y \in IN$$

- *Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.*
- *L'ordre est total ou partiel ?*

EXERCICE N°02 (8 pts)

1- Montrer en utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point que :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = (3x+3) = 6$$

2- Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & si \ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & si \ x > 0 \end{cases}$$

a et b sont des réels

a- *Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.*

b- *Déterminer a pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.*

EXERCICE N°03 (6pts)

*Sur l'ensemble $\mathbb{R}/\{1\}$, On définit la loi de composition interne * comme suit :*

$$x * y = x + y - xy$$

- *Montrer que $(\mathbb{R}/\{1\}, *)$ est un groupe commutatif.*

BON COURAGE

Page 1

Corrigé type Examen final Math 1 2021/2022

Ex 01 : 6pts

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur $\mathbb{R}$ tq :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}.$$

0,75

(1) $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{-a- } \mathcal{R} \text{ reflexive.} \\ \text{-b- } \mathcal{R} \text{ Antisymétrique} \\ \text{-c- } \mathcal{R} \text{ Transitive.} \end{cases}$

-a- $\mathcal{R}$ est reflexive si $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x - x = 0 \in \mathbb{N}$ 1,25

$\Rightarrow x \mathcal{R} x. \Rightarrow \mathcal{R}$ est reflexive.

-b- $\mathcal{R}$ est antisymétrique si $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N} \\ y \mathcal{R} x \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ y - x \geq 0 \end{cases}$$ 1,5

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ y \geq x \end{cases} \Longrightarrow x = y.$$ $\Rightarrow \mathcal{R}$ est Antisymétrique.

-c- $\mathcal{R}$ est transitive si $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Alors. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N} \\ y \mathcal{R} z \Leftrightarrow y - z \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y = K, \ K \in \mathbb{N} \quad \text{...(1)} \\ y - z = K', \ K' \in \mathbb{N} \quad \text{...(2)} \end{cases}$$

1,5

(1) + (2) $\Rightarrow x - y + y - z = K + K'$

$\Rightarrow x - z = K + K'$ (La somme de deux entiers naturels donne un entier naturel).

$\Rightarrow x - z \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \mathcal{R} z$ donc $\mathcal{R}$ est transitive de (a), (b) et (c). R est une relation d'ordre.

* L'ordre est total ou partiel ? :

R est une relation d'ordre total si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}. \text{ On a } x R y \text{ ou } y R x$$

1

Si on choisit par exemple : $x = \frac{3}{4}$ et $y = 2$.

on a alors. $\frac{3}{4} - 2 = \frac{3-8}{4} = \frac{-5}{4} \notin \mathbb{N}$.

et $2 - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4} \notin \mathbb{N}$.

donc $\frac{3}{4} \not R\, 2$ et $2 \not R\, \frac{3}{4}$ Ainsi l'ordre est partiel.

Exo2 : 8 pts

1 - Utilisons la définition de la limite, Montrons que :

$$\lim_{x \to 1} (3x + 3) = 6$$

0,5

on a. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I$
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon$

Dans notre exemple, $x_0 = 1$ et $l = 6$. on remplace :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - 1| < \delta \Rightarrow |3x+3-6| < \varepsilon.$$

Nous cherchons à obtenir δ en fonction de ε. 0,5

Alors. Soit $\varepsilon > 0$, $|3x+3-6| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |3x - 3| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow 3|x-1| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

1

Donc on peut prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ Ainsi δ existe.

donc $\lim_{x \to 1} (3x+3) = 6$

_2_ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad ; a, b \in \mathbb{R}.$$

-a_ Détermination de b pour que f soit continue :

f continue $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0)$ (0,5)

On a * $f(0) = b$ (0,5)

* $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x+1} = 1$ (0,5)

* $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax+b) = b$ (0,5)

donc pour que f est continue, il faut que $\boxed{b = 1}$ (1)

_b_ Détermination de a pour que f soit dérivable :

f est dérivable $\Leftrightarrow f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ (0,5)

On a. $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (0,5) (0,5)

Alors $f'(0) = a$ (0,5) ; $f'_d(0) = \dfrac{-1}{(0+1)^2} = -1$ (0,5)

et $f'_g(0) = a$ (0,5)

Donc pour que f soit dérivable il faut $\boxed{a = -1}$ (0,5)

Exo3 : 6pts

Sur $\mathbb{R}/\{1\}$. $x * y = x + y - x.y$

_ Montrons que $(\mathbb{R}/\{1\}, *)$ est un groupe Commutatif :

$(\mathbb{R}/\{1\}, *)$ est un groupe commutatif $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (1) * \text{ est Commutatif.} \\ (2) * \text{ est associative.} \\ (3) * \text{ admet un élément neutre.} \\ (4) \text{ Chaque élément admet un inverse. (Symétrique)} \end{cases}$ 1

1_ La Commutativité :

$\forall x, y \in \mathbb{R}/\{1\}$, $x * y \overset{?}{=} y * x$.

$x * y = x + y - x.y = y + x - y x$ 1

$= y * x$. (Car + et × sont Commutative)

2_ L'Associativité :

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}/\{1\}$, $(x * y) * z \overset{?}{=} x * (y * z)$.

Alors. $(x * y) * z = (x * y) + z - (x * y) z$ 1

$= x + y - xy + z - (x + y - xy) z$

$= x + y - xy + z - xz - yz + xyz$ --- (1)

$x * (y * z) = x + (y * z) - x (y * z)$

$= x + y + z - yz - x (y + z - yz)$ 1

$= x + y + z - yz - xy - xz + xyz$ --- (2)

(1) = (2) donc $*$ est associative.

3_ L'Existance de l'élément neutre :

$\exists e \in \mathbb{R}/\{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}/\{1\}$: $x * e = e * x = x$.

(On utilise une seule équation car $*$ est Commutative.)

1

$$x * e = x \Leftrightarrow x + e - xe = x$$
$$\Leftrightarrow e - xe = 0$$
$$\Leftrightarrow e(1-x) = 0 \; ; \; x \in \mathbb{R}/\{1\}.$$
$$\Leftrightarrow e = 0 \in \mathbb{R}/\{1\}$$

D'où l'élément neutre existe $e = 0$.

4- L'existance de l'élément symetrique :

$\exists x' \in \mathbb{R}/\{1\}, \forall x \in \mathbb{R}/\{1\} : x * x' = x' * x = e.$

$$x * x' = e = 0 \Leftrightarrow x + x' - xx' = 0. \quad 1$$
$$\Leftrightarrow x'(1-x) = -x$$
$$\Leftrightarrow x' = \frac{-x}{1-x} \text{. existe. } \forall x \in \mathbb{R}/\{1\}.$$

de (1), (2) (3) et (4) on déduit que $(\mathbb{R}/\{1\}, *)$ est un groupe Commutatif.