corrige du TC

Exo 1 (7 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

1°) Calculons le determinant de A ; $\det A = |A|$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = (-1+8) - 2(2) + 3 \cdot 1 \quad \text{1pt}$$

$$= 7 - 4 + 3 = +6 \neq 0 \quad \text{0,5}$$

le $\det A \neq 0 \Rightarrow$ La materce A admet une matrice inverse.

2°)

$$\mathrm{com}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{0,25} \times 9$$

$$\mathrm{Com}\, A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{t}\mathrm{Com}\, A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1pt   1pt

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{1pt}$$

Exo 2 : (7 points) Soit le système d'équation $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=50 \\ 3x_1+5x_2-4x_3=2 \\ 4x_1+7x_2-2x_3=31 \end{cases}$

① on peut écrire le systéme d'équation sous la forme matricielle $A.X=B$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}$$ (1 point)

② déterminant les solutions du systéme par le biais de la méthode de Gauss.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 50 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & -2 & 31 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1^0 \\ L_2^0 \\ L_3^0 \end{array}$$ (1 point)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 50 \\ 0 & -4 & -16 & -148 \\ 0 & -5 & -18 & -169 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1^1 \\ L_2^1 = L_2^0 - 3L_1^0 \\ L_3^1 = L_3^0 - 4L_1^0 \end{array}$$ (1,5 pts)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 50 \\ 0 & -4 & -16 & -148 \\ 0 & 0 & 8 & 64 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 = 4L_3^1 - 5L_2^1 \end{array}$$ (1,5 pts)

on lire : $8x_3 = 64 \Rightarrow x_3 = 8$

$-4x_2 - 16x_3 = -148 \Rightarrow x_2 = 5$ (1,5 pts)

$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 \Rightarrow x_1 = 3$

D'où $S : \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ (0,5 pt)

Exo 3 :

① $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{x^2}{x^{2/3}} dx = \int x^2 . x^{-2/3} dx$

$= \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} = \frac{3}{7} x^2 . \sqrt[3]{x} + C$ 2 pts

② $\int 2x (x^2-1)^6 dx \quad || \quad u = x^2-1 \Rightarrow du = 2x dx$

$= \int (x^2-1)^6 . 2x dx = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{1}{7} (x^2-1)^7 + C$

2 pts

3°) $\int x^3 . \ln x \, dx \quad || \quad \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array}$

$I = \frac{x^4}{4} . \ln x - \int \frac{1}{x} . \frac{x^4}{4} dx$

$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx$ 2 pts

$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} . \frac{x^4}{4} + C$