Corrigé de l'examen Final de Physique 1 (2020-21)

Exercice 1 : (10 pts)

Le mouvement d'un point matériel M se déplace dans le plan (xOy) est décrit par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \cos 2t\ \vec{i} + 3\ sin2t\ \vec{j}.$$

1- L'équation de la trajectoire de M :

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3^2\cos^2 2t \\ y^2 = 3^2\sin^2 2t \end{cases} \quad (0,5)$$

Donc l'équation de la trajectoire : $x^2 + y^2 = 3^2$ (1) est une équation d'un cercle de rayon R = 3 m et de centre O(0, 0). (0,5)

2- Le vecteur vitesse :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -6\sin 2t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 6\cos 2t \end{cases} (1) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 6\,(-\sin 2t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j}) \quad (0,5)$$

son module est : $v = 6\ m/s$ donc le mouvement est circulaire uniforme.

3- Le vecteur d'accélération:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -12\cos 2t \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -12\sin 2t \end{cases} (1) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -12(\cos 2t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j}) \quad (0,5)$$

son module est : $a = 12\ m/s^2$.

4- la vitesse angulaire ω : $\omega = \dot{\theta} = \frac{v}{R} = \frac{6}{3} = 2\ rad/s$ (1)

la position angulaire $\theta(t)$: $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega\, dt \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$ (0,5)

à $t = 0, \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta(t) = 2t$ rad. (0,5)

Corrigé de l'examen Final de Physique 1 (2020-21)

5- Le vecteur position, vitesse et accélération en coordonnées polaires :

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 3\ m$ et $tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta(t) = 2t$ rad.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} = R\overrightarrow{e_r} = 3\overrightarrow{e_r} & (0,5) \\ \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta} = 6\overrightarrow{e_\theta} & (0,5) \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\frac{d\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r} = -12\overrightarrow{e_r} & (0,5) \end{cases}$$

Tels que : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$, $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$ et $\dot{R} = 0$ $\dot{\theta} = \omega = 2\frac{rad}{s} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0.$ (0,5)

6- Le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur accélération $\vec{v} \perp \vec{a}$ si le produit scalaire

$\vec{v}.\vec{a} = 0$

$\vec{v}.\vec{a} = 6\,(-sin2t\,\vec{i} + cos2t\,\vec{j}).(-12\,(cos2t\,\vec{i} + sin2t\,\vec{j}))$ (1)

$= -72\,(-sin2t\,cos2t + cos2t\,sin2t) = 0 \Rightarrow \vec{v}.\vec{a} = 0$

$\vec{v}.\vec{a} = v\,a\cos(\vec{v}.\vec{a}) \Rightarrow cos(\vec{v}.\vec{a}) = 0 \Rightarrow langle(\vec{v}.\vec{a}) = 90 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{a}$

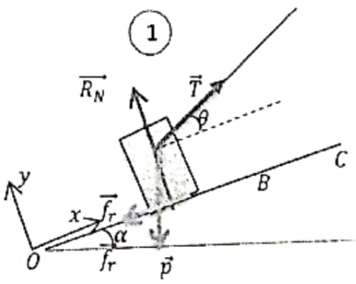
Ou bien : en coordonnée polaires :

$$\vec{v}.\vec{a} = (R\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}).\left(-R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r}\right) = 0$$

Exercice 2 : (10 pts)

1- Le bilan des forces qui s'applique sur le skieur (voir figure): (1)

- Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$
- La tension de la corde $\vec{T}$
- La réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ (1)
- Force de frottement $\vec{f_r}$



2- Le coefficient de frottement cinétique μ entre la neige et les skis :

Comme le skieur monte à vitesse constante $\vec{v} = 45\,\vec{i}$ m/s $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ donc le mouvement est rectiligne uniforme

En utilisant la 1ere loi de Newton (principe d'inertie):

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} + \vec{T} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f_r} = \vec{0} \quad (0,5)$$

En projetant selon les axes (ox, oy) :

Corrigé de l'examen Final de Physique 1 (2020-21)

$$\begin{cases} -p\,sin\alpha + Tcos\theta - f_r = 0 & (0{,}5) \\ -p\,cos\alpha + Tsin\theta + R_N = 0 & (0{,}5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg\,sin\alpha + Tcos\theta = \mu\,R_N & (1) \\ mg\,cos\alpha - Tsin\theta = R_N & (2) \end{cases}$$

Et : $f_r = \mu\,R_N$ (0,5)

En substituant l'expression de la réaction R_N dans l'équation (1), on obtient :

$$-mg\,sin\alpha + T\cdot cos\theta = \mu\,(mg\,cos\alpha - Tsin\theta) \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{-mg\,sin\alpha + Tcos\theta}{mg\,cos\alpha - Tsin\theta}} \quad (1)$$

AN : $\mu = \dfrac{-40.10\,sin15° + 250\,cos30°}{40.10\,cos15° - 250\,sin30°} \Rightarrow \boxed{\mu = 0{,}43}$ (0,5)

3- La quantité de mouvement :

$$\vec{P} = m\vec{v} = 40.45\,\vec{\imath} = 1800\,\vec{\imath} \quad (1)$$

4- L'accélération que subirait le skieur s'il lâchait le câble du tire au point B :
Donc la force de traction du cable est nulle $\vec{T} = \vec{0}$ entre le point B et C, $a \neq 0$
D'après le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f_r} = m\vec{a}$$

Projection selon (ox, oy) :

$$\begin{cases} -mg\,sin\alpha - f_r = ma \\ -mg\,cos\alpha + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg\,sin\alpha - \mu\,R_N = ma & (3) \quad (0{,}5) \\ mg\,cos\alpha = R_N & (4) \quad (0{,}5) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow -mg\,sin\alpha - \mu\,mg\,cos\alpha = ma$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a = -g(sin\alpha + \mu\,cos\alpha)} \quad (0{,}5)$$

$a = -10(sin15° + 0{,}43\,cos15°) \Rightarrow \boldsymbol{a = -6{,}74\ ms^{-2}}$, $\vec{a} = \boldsymbol{-6{,}74\,\vec{\imath}\,ms^{-2}}$ (0,5)

5 – la vitesse du skieur en haut de la piste (point C) :

$$v_c^2 - v_B^2 = 2a(x_c - x_B) \Rightarrow v_c^2 = 2a\,BC + v_B^2 \quad (0{,}5)$$

$v_B = 45\ ms^{-1}$; la distance BC =118 m $\Rightarrow v_c^2 = 2(-6{,}74)118 + 45^2 = 434{,}36$

$\boldsymbol{v_B = 20{,}84\ m/s}$ (0,5)

$\vec{v}.\vec{a} < 0$ donc le mouvement est rectiligne uniformément décéléré. (0,5)