UNIVERSITE DE BATNA2 MBBL — Le : 09/06/2021
SOCLE COMMUN EN SCIENCES ET TECHNOLOGIE
Matière : Mathématique (M1). — (Durée 1h30mn)

EXAMEN FINAL

EXERCICE N°01 (7 pts)

On considère l'application f définie par :

$$f : \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\to \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{2x+1}.$$

1) Rappeler la définition d'une application f injective de E dans F, (E et F sont des ensembles),
   - C'est quoi E ? C'est quoi F ?
   - L'application f est-elle injective ?
2) Rappeler la définition d'une application f surjective de E dans F,
   - L'application f est-elle surjective ?
3) l'application f est-elle bijective ?, Si oui, Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

EXERCICE N°02 (6 pts)

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$, On définit la relation binaire $\Re$ par :

$$x \Re y \Leftrightarrow xe^{y} = ye^{x}$$

- Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE N°03 (7 pts)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & si \quad x \prec 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ e^{bx} - x & si \quad x \succ 0 \end{cases}$$

a et b sont des réels

1. A l'aide de la règle de L'Hospital déterminer la limite suivante :
   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
2. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

BON COURAGE

P1

Corrigé type Examen M1 2020_2021

Exo1 : Soit $f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\longrightarrow]-\infty, \frac{1}{2}[$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application :

1) * E est l'ensemble de départ. 0,5

* F " " d'arrivé. 0,5

f est injective $\Longleftrightarrow \forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$ 1

f est injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in]-\frac{1}{2}, +\infty[,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$?

soit $x, x' \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

$f(x) = f(x') \Rightarrow \dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{x'-1}{2x'+1} \Rightarrow (x-1)(2x'+1) = (x'-1)(2x+1)$

$\Rightarrow \cancel{2xx'} + x - 2x' - \cancel{1} = \cancel{2xx'} + x' - 2x - \cancel{1}$

$\Rightarrow \cancel{3}x = \cancel{3}x' \Rightarrow x = x'$ Donc f est injective 1

2) f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E$ tq $y = f(x)$ 1

f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in]-\infty, \frac{1}{2}[,\ \exists x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[,\ y = f(x)$

$y = f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1} \Rightarrow (2x+1)y = x-1 \Rightarrow 2xy + y - x = -1$

$\Rightarrow x(2y-1) = -y-1 \Rightarrow x = -\dfrac{(y+1)}{2y-1}$ 1

$\Rightarrow x = \dfrac{y+1}{1-2y} \overset{?}{\in}]-\frac{1}{2}, +\infty[$

3) f est Bijective $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est injective} \\ f \text{ est surjective.} \end{cases}$ (1) (P2)

De (1) et (2), on déduit que f est bijective.

* Détermination de f^{-1}

f est bijective, donc elle admet une application réciproque, (inverse) f^{-1} ;

(1)

D'après la question 2 on trouve.

$$x = \frac{y+1}{1-2y} = f^{-1}(y).$$

Ainsi.

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1} : \left]-\infty, \tfrac{1}{2}\right[&\longrightarrow \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \frac{y+1}{1-2y}. \end{aligned}}$$

Exo2 soit R une relation sur $\mathbb{R}$:

$$x R y \Longleftrightarrow x.e^{y} = y e^{x}.$$

P3

R est une relation d'équivalence $\Longleftrightarrow \begin{cases} 1) R \text{ reflexive.} \\ 2) R \text{ Symétrique.} \\ 3) R \text{ Transitive.} \end{cases}$ 1,5

1) R est Reflexive si $\forall x \in \mathbb{R}$, $x R x$. 1,5

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x e^{x} = x e^{x} \Leftrightarrow x R x$.

2) R est symétrique : si $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x R y \Rightarrow y R x$ 1,5

On a $x R y \Leftrightarrow x e^{y} = y e^{x} \Rightarrow y e^{x} = x e^{y} \Rightarrow y R x$.

3) R est transitive si $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x R y \\ \text{et} \\ y R z \end{cases} \Rightarrow x R z$.

Alors on a $x R y \Leftrightarrow x e^{y} = y e^{x}$ 1,5

$y R z \Leftrightarrow y e^{z} = z e^{y}$.

- Calculons $x(y e^{z})$:

$$x(y.e^{z}) = x(z e^{y}) = z(x e^{y}) = z(y e^{x}).$$

Donc $x.y e^{z} = z y e^{x}$. si $y \neq 0$ on peut diviser par y

$\Rightarrow x e^{z} = z e^{x} \Longleftrightarrow x R z$.

Solution de l'ex 3 : (7pts)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ e^{bx}-x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

PM

1) Calcul de la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{2} = 0$$ 1.5

2) Détermination de a et b pour que f soit continue :

f continue $\Leftrightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$ 0.5

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} a\left(\frac{\sin ax}{ax}\right) = a \quad (1) \\ \lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{bx} - x = 1 \quad (1) \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

3) Détermination de b pour que f soit dérivable. 0.5

f dérivable $\Leftrightarrow \lim_{x\overset{<}{\to}x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\overset{>}{\to}x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$$

(D'après la question 1) (1)

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{(e^{bx}-x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{bx}-1)-x}{x} \quad (1)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{bx}-1}{x}\right) - 1 = be^{b0} - 1 = b-1$$

$\Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$ 0.5