EXAMEN FINAL M1

تنبيه : ممنوع استعمال الالة الحاسبة و الهاتف النقال

Exo No.01 : (07 points)

Soit R une relation définie sur R par :

$\forall x, y \in R, \quad x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

1- Démontrer que R est une relation d'équivalence .
2- Déterminer les classes d'équivalence .
3- Déduire la cl(2)=$\dot{2}$

Exo No.02 :(07 points)

On définit dans R^3 ,la loi de composition interne ,notée * par :

$$\forall (a,b),(a',b') \epsilon R^2, (a,b) * (a',b') = (aa' + 3bb', ab' + ba')$$

Démontrer que $(R^2,*)$ est un groupe Abélien ?

Exo No.03 :(06 points)

Soient a , b deux nombres réels , on définit la fonction $f : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) Donner une condition sur b pour que f soit continue sur R.
b) Déterminer a et b telle que f soit dérivable sur R et dans ce cas calculer f'(0)

Bonne Chance

Correction de l'examen Final L-M1

Exo1 (07 points)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$

) $\mathcal{R}$ est-il une relation d'equivalence:

$\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence $\Leftrightarrow$

- $\mathcal{R}$ est reflexive
- $\mathcal{R}$ est symetrique (0,5)
- $\mathcal{R}$ est Transitive

) $\mathcal{R}$ est une relation reflexive: $x \in \mathbb{R}$ $x \mathcal{R} x$ (0,25)

donc $x^2 - x = x^2 - x \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow x \mathcal{R} x$ (0,75)

$\Rightarrow \mathcal{R}$ est une relation reflexive

$\mathcal{R}$ est une relation symetrique: soit $x, y \in \mathbb{R}$

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$ (0,25)

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow y \mathcal{R} x$ (0,75)

$\mathcal{R}$ est une relation Transitive.

par def: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $\left.\begin{matrix} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \mathcal{R} z$ (0,25)

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$y \mathcal{R} z \Leftrightarrow y^2 - z^2 = y - z$ (0,75)

$\oplus$ $x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Conclusion: les Trois, criteres sont bien verifiés

On déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'equivalente (0,5)

2) Les classes d'equivalences : $cl(x) = \dot{x} = \{y \in \mathbb{R} / xRy\}$ 0,5

autrement : $x \mathcal{R} a$

$$x \mathcal{R} a \Leftrightarrow x^2 - a^2 = x - a$$

$$(x-a)(x+a) = (x-a)$$

$$(x-a)(x+a) - (x-a) = 0$$

$$(x-a)[(x+a)-1] = 0 \qquad 1,5$$

$$\Leftrightarrow \quad x - a = 0 \quad \boxed{ou} \quad x + a - 1 = 0$$

$$x = a \quad \boxed{ou} \quad x = 1 - a$$

Les classes d'equivalences : $\dot{a} = \{a, 1-a\}$

3°) $cl(2) = \dot{2} = \{2, -1\}$ 1pt

Exo 2 (07 points)

$$\forall (a,b);(a',b') \in \mathbb{R}^2 : (a,b) * (a',b') = (aa' + 3bb' ; ab' + ba')$$

$(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe Abélien $\Leftrightarrow$ 0,5
- $(*)$ est commutative
- $(*)$ est associative
- l'existance de l'elt neutre
- " de l'elt sym

a) La commutativité : $\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2 : (a,b) * (a',b') = (a',b') * (a,b)$ 0,25

$\forall (a,b);(a',b') \in \mathbb{R}^2 \quad (a,b) * (a',b') = (aa' + 3bb', ab' + ba')$

$= (a'a + 3b'b, b'a + a'b)$

sachant que le produit et la somme dans $\mathbb{R}$ est commutative

$= (a',b') * (a,b)$ 1,25

Donc la loi $(*)$ est commutative

b) L'associativité :

$\forall (a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{R}^2 : [(a,b) * (a',b')] * (a'',b'') = (a,b) * [(a',b') * (a'',b'')]$ 0,25

$[(a,b)*(a',b')]*(a'',b'') = [aa'+3bb', ab'+ba'] * (a'',b'')$

$= [(aa'+3bb')a'' + 3(ab'+ba')b''; (aa'+3bb')b'' + (ab'+ba')a'']$

$= (aa'a'' + 3bb'a'' + 3ab'b'' + 3ba'b'', aa'b'' + 3bb'b'' + ab'a'' + ba'a'']$ ①

$(a,b) * [(a',b') * (a'',b'')] = (a,b) * [a'a'' + 3b'b'' + a'b'' + b'a'']$ 1,25

$= [a(a'a'' + 3b'b'') + 3b(a'b'' + b'a''); a(a'b'' + b'a'') + b(a'a'' + 3b'b'')]$

$= [aa'a'' + 3ab'b'' + 3ba'b'' + 3bb'a'', aa'b'' + ab'a' + ba'a'' + 3bb'b'']$

① = ② donc $*$ est associative dans $\mathbb{R}^2$.

) l'existance de l'element neutre

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a,b) * (e_1,e_2) = (e_1,e_2) * (a,b) = (a,b)$ 0,25

$(a,b) * (e_1,e_2) = (ae_1 + 3be_2, ae_2 + be_1) = (a,b)$

$\Rightarrow \begin{cases} ae_1 + 3be_2 = a \\ ae_2 + be_1 = b \end{cases} \Rightarrow a(e_1+e_2) + b(3e_2+e_1) = a+b$

$\Rightarrow \begin{cases} e_1+e_2 = 1 \\ e_1+3e_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2e_2 = 0 \Rightarrow e_2 = 0 \Rightarrow e_1 = 1$

1,25

donc $(e_1,e_2) = (1,0)$ est l'element neutre.

) l'existance de l'element symetrique: 0,25

soit (a',b') le symetrique de $(a,b) / (a,b)*(a',b') = (a',b')*(a,b) = (1,0)$

$(aa'+3bb', ab'+ba') = (1,0) \Rightarrow \begin{cases} aa'+3bb' = 1 \\ ab'+ba' = 0 \end{cases}$

$ab'+ba' = 0 \Rightarrow ba' = -ab' \Rightarrow b' = ba'/-a$

$aa' + 3b \cdot \frac{ba'}{-a} = 1 \; ; \; a'\left(a - \frac{3b^2}{a}\right) = 1 \Rightarrow a' = \frac{a}{a^2-3b^2}$

$b' = \frac{-b}{a^2-3b^2} \; , \; (a',b') = \left(\frac{a}{a^2-3b^2}; \frac{-b}{a^2-3b^2}\right)$ 1,25

$= \frac{1}{a^2-3b^2}(a, -b)$ element syme

Conclusion: 0,5

De ce que precede $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe Abélien.

3 (06 points)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminons la valeur de b pour que f soit continue :

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} ax+b = b$ 1

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$ 1

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \Rightarrow \boxed{b=1}$ 1

2) f est derivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ f est continue $\Rightarrow b = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} a & x \leq 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & x > 0 \end{cases}$$

au point $x_0 = 0$ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{ax+1-1}{x} = a$ 1

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(1+x)}{x(1+x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1+x} = -1 \quad 1$$

donc $f'(x_0+0) = f'(x_0-0) \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$f'(0) = a = -1$ 1pt

dérivable $\longrightarrow$ continue