- Correction - du Controle Cont (07 points)

Exo1 : $\forall p,q \in \mathbb{N}^*$; $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^* / p^n = q$

① $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre $\Leftrightarrow$ { - $\mathcal{R}$ est reflexive (0,5)
- $\mathcal{R}$ est antisymetrique
- $\mathcal{R}$ est transitive }

ⓐ $\mathcal{R}$ est reflexive : $\forall p\in\mathbb{N}^*\ p\mathcal{R}p$

$p\mathcal{R}p \Rightarrow p^n = p$ pour $n=1 \Rightarrow p^1 = p \Rightarrow p\mathcal{R}p$ (1,5)

ⓑ Antisymetrique : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$: $\left.\begin{array}{l} p\mathcal{R}q \Rightarrow (\exists n\in\mathbb{N}^*)\ p^n = q \\ \text{Ⓐ}\ q\mathcal{R}p \Rightarrow (\exists n'\in\mathbb{N}^*)\ q^{n'} = p \end{array}\right\} \Rightarrow$ (1,5)

$p \overset{q=p^n}{=} q^{n'} = (p^n)^{n'} = p^{nn'}$ où $nn' = 1 \Rightarrow n = n' = 1 \Rightarrow \boxed{p = q}$

ⓒ Transitivite : $\forall (p,q,r)\in\mathbb{N}^{*3}$

$$\left.\begin{array}{l} p\mathcal{R}q \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*\ \ p^n = q \\ q\mathcal{R}r \Rightarrow \exists n'\in\mathbb{N}^*\ \ q^{n'} = r \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (1,5)$$

$$q^{n'} \underset{q=p^n}{=} r \Longrightarrow (p^n)^{n'} = p^{nn'} = r \quad \text{où } nn' = n''$$

$$p^{n''} = r \Rightarrow p\mathcal{R}r$$

De ce qui precede ⓐ, ⓑ, ⓒ, on dit que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. (0,5)

② $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale si :

$$\forall p,q \quad p\mathcal{R}q \text{ ou } q\mathcal{R}p$$

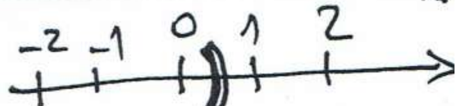
- Contre exemple on prend $(p,q) = (2,3)$ (1,5)

$2 \not\mathcal{R} 3$ Ⓐ $3 \not\mathcal{R} 2$ $\nexists n\in\mathbb{N}^*$

$2^n = 3$ Ⓐ $3^n = 2$ ainsi l'ordre est partiel

Exo 2

2) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - E(x)}{x + E(x)} =$$



soit $x \in]0,1] \Rightarrow E($

(2pts)

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x - E(x)}{x + E(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x + 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$ (2pt

---

(2pts)

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin x . \cos x}{x^3 . \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} . \left[\frac{1 - \cos x}{x^3} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{x} . \frac{\sin^2 x/2}{\frac{2}{2} . x^2/2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{x} . \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} . \frac{1}{2} . \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 = 1 . \frac{1}{2} . 1 = \frac{1}{2}$$ (2pts)

1) $$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \sin \frac{1}{x}$$ F.I (2pts)

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$$

$$\underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} -x}_{0} \leq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x}_{0}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Exo3 : (07 points)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x + \dfrac{x \ln x}{1-x} & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

① Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$ 1pt

On étudie f est continue sur $]0,1[$

$\boxed{x=0}$ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 0$ 0,5

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \overset{\to 0}{x} + \dfrac{x \ln x}{1-x}$ 0,5

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$

$\boxed{x=1}$ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = 0$ 1pt

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x + \dfrac{x \ln x}{1-x}$ $\left\}\begin{array}{l} u = 1-x \Rightarrow x = 1-u \\ x \overset{<}{\to} 1 \Rightarrow u \overset{>}{\to} 0 \text{ ou } 0^+ \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{u \to 0^+} \underbrace{(1-u)}_{\to 1} + \dfrac{(1-u)\ln(1-u)}{u}$ $0/0$ Appliquons l'hopital

$= 1 + \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{\ln(1-u)}{u} = \dfrac{\frac{-1}{1-u}}{1} + 1 = 1 - 1 = 0$ 1,5

alors f est continue au point $x=1$

puisque f est continue au point $x=0$, et f cont au point $x=1$ 0,5

$\Rightarrow f$ est cont sur $[0,1]$

② f est cont sur $[0,1]$

f est derivable en $]0,1[$ 2pts

$f(0) = f(1) = 0$

D'après le théorème de Rolle, il $\exists\, c \in]0,1[$ telque $f'(c) = 0$

Fin