Chapitre III : Etude de quelques mouvements usuels

دراسة بعض الحركات الخاصة

1. Mouvements Rectilignes :(الحركات المستقيمة)

Un point matériel M est en mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite dans le référentiel $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ confondue sur un seul axe de cette référence ou s'effectue le mouvement de point M. Donc nous n'avons besoin que d'un seul paramètre pour définir la position du point M.

1.1. Mouvement rectiligne uniforme (MRU) : (الحركة المستقيمة المنتظمة)

Un point matériel est en mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et son vecteur vitesse constant $V=V_0=\dot{X}$ = constante, donc son vecteur accélération nul (a = $\frac{dv}{dt}$ = 0).

1.1.1. Equation horaire : on choisit l'axe OX comme repère rectiligne.

On a ; $V=V_0=\dot{X}$ =constante donc $\vec{V}(t) = V_0\vec{\imath} \rightarrow V = V_0 = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = V_0 dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} x = \int_0^t V_0 dt$

$\Rightarrow$ $x(t) = V_0 t + x_0$ est l'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme.

Avec x_0 est une constante d'intégration qui se détermine à partir des conditions initiales.

1.1.2. Diagrammes du mouvement مخططات الحركة

Les diagrammes du mouvement rectiligne uniforme sont la représentation graphique de :

- l'accélération : a = 0 m/s^2, - la vitesse : $V=V_0$= cste

- et du déplacement en fonction du temps : $x(t) = V_0 t + x_0$

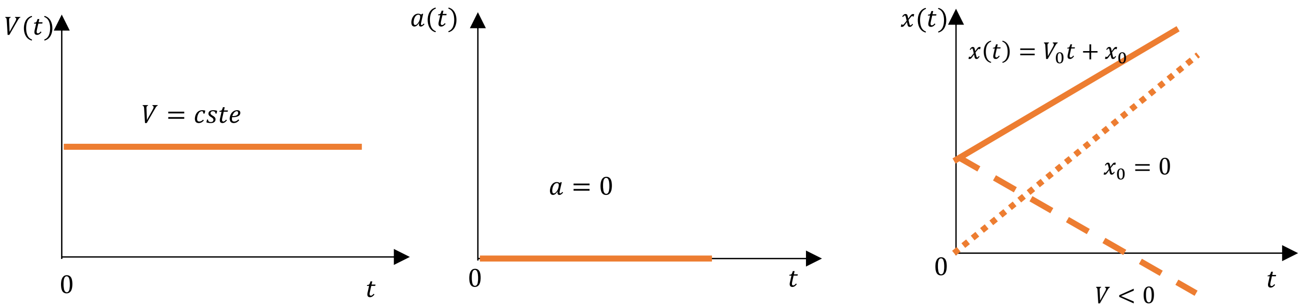


Fig.III.1

1.2. Mouvement rectiligne uniformément varie (MRUV) (الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام)

Le mouvement d'un point matériel est rectiligne uniformément varié si sa <u>trajectoire</u> est une <u>droite</u> et son <u>accélération</u> est <u>constante</u>. $\vec{a} = a_0\vec{\imath} = cste$

En considérant les conditions initiales (t=0, V(0)= V_0).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow d\vec{V} = a_0\vec{\imath}\,dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} d\vec{V} = \int_0^t a_0\vec{\imath}\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = (a_0\,t + V_0)\vec{\imath}$$

On obtient alors l'équation de la vitesse instantanée : $V(t) = (a_0\,t + V_0)$

1.2.1. Equation horaire du mouvement : Si on prend aussi les conditions initiales (pour t=0, $x(0) = x_0$ et V(0) = V_0).

et partant de l'équation : $V(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx(t) = \int_0^t V(t)dt = \int_0^t (a_0\,t + V_0)dt$

L'équation horaire est donc : $x(t) = (\frac{1}{2}a_0t^2 + V_0t + x_0)$

Donc les équations du MRUV : $\begin{cases} a = a_0 = cste \\ V(t) = (a_0\,t + V_0) \\ x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + V_0t + x_0 \end{cases}$

1.2.2. Diagrammes du mouvement : les diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié relatifs à l'accélération, la vitesse et le déplacement sont représentés dans la figure suivante.

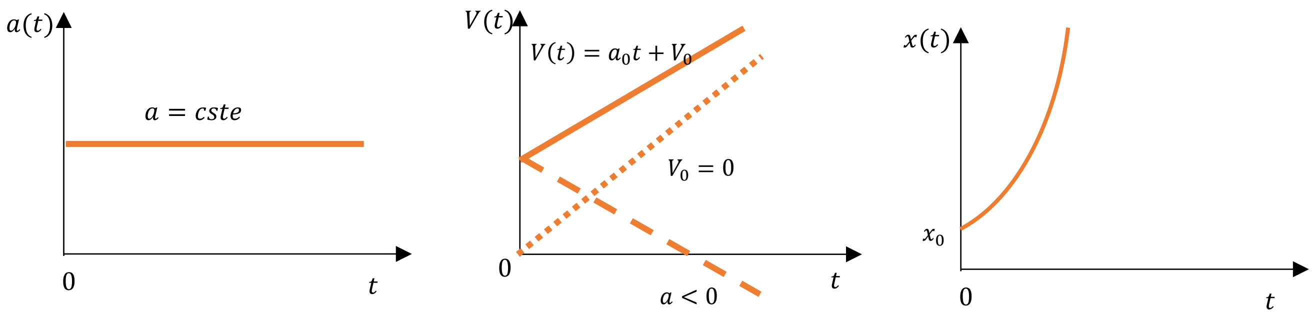


Fig.III.2

Le mouvement rectiligne est <u>accéléré</u> si $\vec{a}.\vec{V} > 0$, et il est <u>retardé</u> si $\vec{a}.\vec{V} < 0$.

1.2.3. Relation entre vitesse et accélération indépendamment du temps :

$$V^2 - V_0^2 = 2a_0(x - x_0)$$

Démonstration :

On a : V = $V = a_0 t + V_0 \Rightarrow t = \frac{V - V_0}{a_0}$

En remplace t dans l'expression de $x(t)$: $x - x_0 = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{V-V_0}{a_0}\right)^2 + V_0\left(\frac{V-V_0}{a_0}\right)$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{(V - V_0)^2}{2a_0} + V_0\left(\frac{V - V_0}{a_0}\right) \Rightarrow x - x_0 = \frac{(V - V_0)[V - V_0 + 2V_0]}{2a_0}$$

$$\Rightarrow 2a_0(x - x_0) = V^2 - V_0^2$$

2. Mouvements circulaire (الحركات الدائرية) : Si le mouvement du point M est circulaire ou la trajectoire appartient à un plan, il est possible de repérer la position d'un mobile soit par les coordonnées cartésiennes soit par les coordonnées polaires.

2.1. Vecteur de position du mobile : dans la trajectoire du point M est un cercle de centre O et de rayon R = cost.

La position du mobile en coordonnées cartésiennes est définie par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Mais en coordonnées polaires le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$. Ce système de coordonnées est bien adapté pour ce type du m^{vt}.

Les équations du M^{vt} s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r} \\ \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathrm{R}\frac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

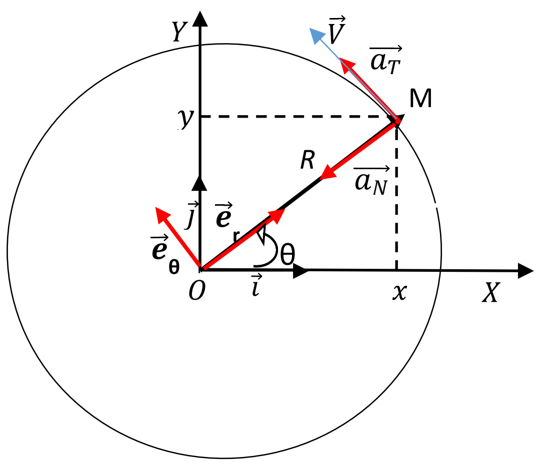


Fig.III.3

2.1. Mouvements circulaire uniforme (MCU) (الحركات الدائرية المنتظمة) :

Le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ est constante.

On a alors les équations du MCU :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r} \\ \vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathrm{R}\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{la vitesse est tangentielle } (R\dot{\theta} = V) \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

Et puisque $\dot{\theta} = \omega = cste$ alors $\ddot{\theta} = 0$ et $a_T = 0$ $et\,\vec{a} = \overrightarrow{a_N}$ donc l'accélération est normale ou centripète.

L'équation horaire du Mvt est : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \dot{\theta}\,t + \theta_0 = \omega t + \theta_0$

En effet : $\dot{\theta} = \omega = cste$ et V est constante en norme et non pas en direction ($\vec{V}$ $variable$), donc, l'accélération n'est pas nulle.

Ou $\vec{a} = \overrightarrow{a_N}$.

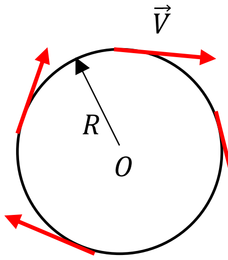


Fig.III.4

2.1.1. Comparaison entre les deux expressions de l'accélération du MC dans la base de Frenet et dans la base polaire.

Repère de Frenet : $\vec{a} = a_T.\vec{T} + a_N.\vec{N}$

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad \text{et } a_N = \frac{v^2}{R}$$

Avec : $\vec{N} = -\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{T} = \overrightarrow{e_\theta}$

MC base polaire : $\vec{a} = \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$

Par identification :

$a_T = \mathrm{R}\ddot{\theta}$ et $a_N = R\dot{\theta}^2$

or $\vec{V} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta}$ et $V = R\omega \rightarrow \omega = \frac{V}{R}$

$\frac{dV}{dt} = R\dot{\omega} = R\ddot{\theta}$

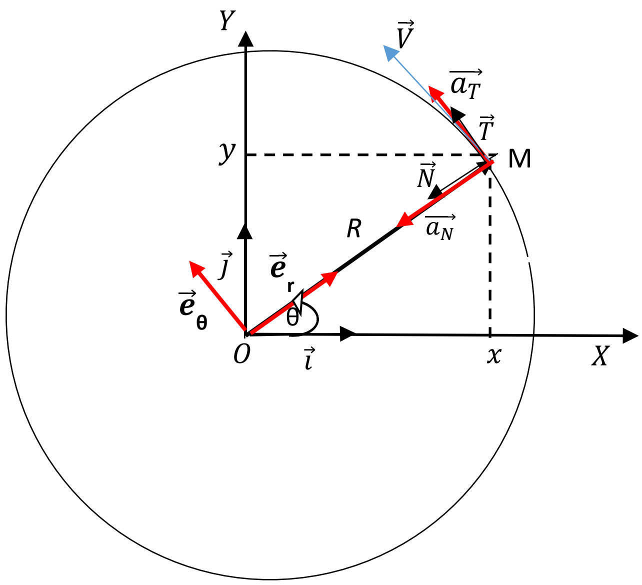


Fig.III.5

$\rightarrow a_T = \frac{dV}{dt}$ et $a_N = R\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{V^2}{R}$.

2.2. Mouvements circulaire uniformément varie (MCUV) :

(الحركات الدائرية المتغيرة بانتظام)

Le mouvement circulaire uniformément varie caractérisé par une trajectoire circulaire et une accélération angulaire $\ddot{\theta} = \dot{\omega}$ est constante.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r} \\ \vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathrm{R}\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

L'équation horaire du M^{vt} : $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = cost$

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}(t) = \int_0^t \ddot{\theta}_0 dt \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0 t + \dot{\theta}_0$$

et $$\int_{\theta_0}^{\theta} \theta = \int_0^t (\ddot{\theta}_0 t + \dot{\theta}_0)dt \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}_0 t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

2.2.1. Comparaison entre MCU et MCUV :

	M^{vt} Circulaire uniforme	M^{vt} Circulaire uniformément varie
Accélération angulaire التسارع الزاوي	$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = 0$	$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = cste$
Vitesse angulaire السرعة الزاوية	$\dot{\theta} = \omega = cste$	$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0 t + \dot{\theta}_0$
Déplacement angulaire الفاصلة الزاوية	$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$ $\theta(t) = \dot{\theta}t + \theta_0 = \omega t + \theta_0$	$\theta(t) = \dfrac{1}{2}\ddot{\theta}_0 t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$

3. Mouvement Rectiligne Sinusoïdal (الحركة المستقيمة الجيبية):

Le mouvement d'un point matériel est rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme : $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

X_m: Amplitude ou élongation maximale.

X : Élongation ou abscisse instantanée, elle varie entre deux valeurs extrêmes $-X_m$ et $+X_m$.

ω : Pulsation du mouvement, son unité est le radian/seconde.

φ: Phase initiale son unité est le radian.

$(\omega t + \varphi)$: Phase instantanée, son unité est le radian.

La vitesse : En dérivant l'équation horaire on obtient l'expression de la vitesse instantanée :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\dot{x}(t) = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes : $\pm\, \omega X_m$

L'accélération : En dérivant l'équation de la vitesse on obtient l'expression de l'accélération instantanée :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Nous pouvons écrire l'expression de l'accélération sous la forme :

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

L'accélération est proportionnelle à l'élongation avec un signe opposé : $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

Avec : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation

T : période du mouvement en seconde

$f = \frac{1}{T}$ est la fréquence de pulsation en Hertz

Exemple : Masse accroché à un ressort

Equation différentielle du mvt :

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

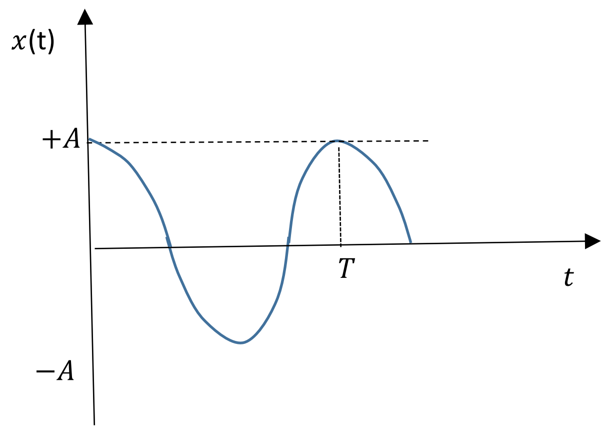


Fig.III.6

La solution mathématique de cette eq diff est :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A: Amplitude

φ: Déphasage (la phase initiale)

Ou pendule simple :

Equation différentielle du mvt :

$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \theta(t) \rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$

Son équation du mouvement est : $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

4. Mouvement parabolique: mouvement d'un projectile (حركة قذيفة)

On lance un projectile M dans l'air avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale (ox), son mouvement s'effectue dans le plan (xoy), sa trajectoire est parabolique.

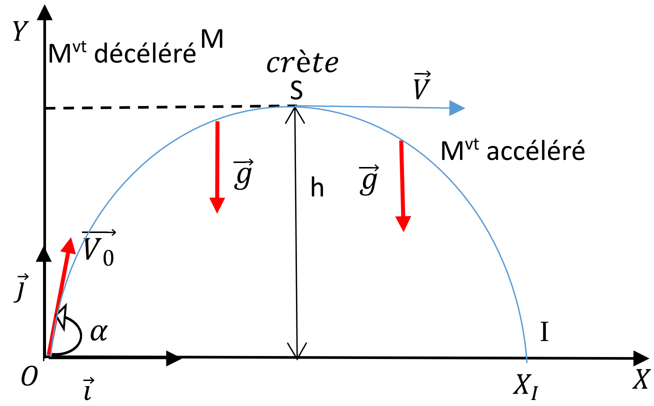
Pour étudier le mouvement de M, on détermine : son accélération, sa vitesse, sa position et sa trajectoire y=f(x).

On décompose le mouvement de M suivant les deux axes ox et oy :

Selon **ox** : l'accélération $a_x = 0 \Rightarrow V_0 = cste \Rightarrow x(t) = V_{0x}\, t + x_0 \Rightarrow le\ MRU\ suiant\ ox.$

Selon **oy** : l'accélération $a_y = -g \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_{0y}\, t + y_0 \Rightarrow le\ MRUV\ suiant\ oy.$

Fig.III.7



- **Les équations horaires du mouvement :**

Selon ox :

$a_x = \ddot{x} = 0 \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow dV_x = 0$

$\Rightarrow V_x = cste = C_1$

$V_x = V_0\, cos\alpha\ ,\ \forall t$

Et $V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int dx = \int V_x dt$

$\Rightarrow x(t) = V_0\, cos\alpha\, .\, t + x_0$

A partir des conditions initiales :

$t = 0$: $V_x(0) = V_0 cos\alpha$ et $x_0 = 0$.

Donc : $x(t) = V_0\, cos\alpha . t$

Selon oy :

$a_y = \ddot{y} = -g \Rightarrow \frac{dV_y}{dt} = -g$

$\Rightarrow \int dV_y = \int -g dt \qquad \Rightarrow V_y(t) = -gt + C_2$

A t=0, $C_2 = V_y(0) = V_0\, sin\alpha$

$\Rightarrow V_y(t) = -gt + V_0\, sin\alpha$

Et $V_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int dy = \int V_y dt$

$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\, sin\alpha\ \ t + y_0$

$t = 0$: $y_0 = 0$

Donc : $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\, sin\, \alpha . t$

Donc les équations horaires du Mvt sont :

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\, sin\, \alpha\, t \end{cases},\quad \vec{V}\begin{cases} V_x = V_0\, cos\, \alpha \\ V_y(t) = -gt + V_0\, sin\, \alpha\, t \end{cases}\quad \text{et}\quad \vec{a}\begin{cases} 0 \\ -g \end{cases}$$

- **L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps :** $\boldsymbol{y = f(x)}$

On a: $x(t) = V_0\, cos\, \alpha\, t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0\, cos\, \alpha}$

En remplace t dans l'équation de y(t) :

$$y(t) = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{V_0 \cos\alpha})^2 + V_0 \sin\alpha \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$y(t) = -\frac{g}{2\,{V_0}^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\,.\,x$$

Sous forme de : $y(t) = Ax^2 + Bx$ c'est l'équation d'une parabole.

- L'altitude maximale $\boldsymbol{h}$ **:** $V_y(t_p) = 0$, ou t_p : le temps de pointe.

$$V_y(t_p) = -gt_p + V_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t_p = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$\boldsymbol{h} = y(t_p) = -\frac{1}{2}gt_p^2 + V_0 \sin\alpha\, t_p = -\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{g}$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

- **Le temps pour lequel le projectile atteint le point I :**

$$\boldsymbol{y(t_I) = 0} \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_I^2 + V_0 \sin\alpha\, t_I = 0$$

$$\boldsymbol{t_I}\left(-\frac{1}{2}g\,t_I + V_0 \sin\alpha\right) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t_1 = 0} \quad (\boldsymbol{origine}) \\ \boldsymbol{t_I} = \frac{2\,V_0 \sin\alpha}{g} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{t_I} = \frac{2\,V_0 \sin\alpha}{g}$$

- **Calcul de la portée X_I :**

On remplace t_I dans x(t) : $x(\boldsymbol{t_I}) = V_0 \cos\alpha\, \boldsymbol{t_I} = V_0 \cos\alpha \frac{2\,V_0 \sin\alpha}{g}$

$$x(\boldsymbol{t_I}) = \frac{2V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}$$

$on\ a : 2\cos\alpha \sin\alpha = \sin 2\alpha$, alors : $\boldsymbol{X_I} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

- Calcul de l'angle de tir pour lequel la portée X_I est maximale :

$\boldsymbol{X_I} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ est max si : $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$