TP-1
Mesures et incertitudes
Détermination de la constante de raideur K d'un ressort et estimation de son incertitude δK

But du TP

Le but de ce travail est d'apprendre quelques règles de base pour estimer les limites d'erreurs et valoriser ainsi nos mesures et nos résultats numériques.

La détermination de la constante de raideur K d'un ressort et l'estimation de son incertitude δK

Incertitude absolue et Incertitude relative

Toute mesure expérimentale est entachée d'une ***erreur*** dont la valeur ne peut être estimée avec exactitude. Toutefois, même s'il est impossible de déterminer la valeur exacte de l'erreur commise, en revanche, il est possible pour chaque type d'erreur de calculer sa limite supérieure (en valeur absolue) que l'on appellera ***incertitude absolue***.

Incertitude absolue

La valeur d'une grandeur physique **g**, doit toujours être accompagnée d'une incertitude **δg**, on écrira alors que

$$\mathbf{g} = \bar{\mathbf{g}} \pm \delta\mathbf{g}$$

$\bar{\mathbf{g}}$: est la valeur moyenne, mesurée ou calculée.

Exemple

$d = 366 \pm 2$ km $\Leftrightarrow$ 364 km $< d <$ 368 km
$m = 2.58 \pm 0.03$ kg $\Leftrightarrow$ 2.55 kg $< m <$ 2.61 kg

Incertitude relative

Une incertitude absolue ne permet pas d'avoir une idée sur la qualité d'une mesure. C'est pour cette raison qu'il faut définir l'incertitude relative, elle permet d'estimer la précision sur le résultat obtenu.

$$\textbf{Incertitude relative} = \frac{\textbf{Incertitude absolue}}{\textbf{Valeur moyenne}}$$

L'incertitude relative n'a pas d'unités, elle s'exprime en général en % ou en ‰.

Exemple:

Si $m = (25{,}4 \pm 0{,}2)$ m, alors l'incertitude relative est : $\delta m/m = 0.2/25.4 = 0.8\%$.
Si $L = (6130 \pm 40)$ cm, alors l'incertitude relative est : $\delta L/L = 0.0065 = 0.65\%$.

Méthodes de calcul des incertitudes

Mesure directe

Quelque soit la grandeur physique mesurée x

$x = \bar{x} \pm \delta x$ avec

$\bar{x}$: la valeur moyenne. $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

δx: l'erreur absolue. $\delta x = \sqrt{\delta x_{sys}^2 + \delta x_{ale}^2}$

δx_{sys}: L'erreur systématique donnée par le constructeur.

δx_{ale}: L'erreur aléatoire

$$\delta x_{ale} = \frac{1}{N}\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Mesure indirecte

$q = \bar{q} + \delta q$ / $q = f(x_1, x_2, \dots\dots\dots x_n)$

x_i: des grandeurs physique mesurables d'une fonction directe ou indirecte.

$$\bar{q} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots . \overline{x_n})$$

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\cdot \delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\cdot \delta x_2\right)^2 + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{\partial q}{\partial x_n}\cdot \delta x_n\right)^2}$$

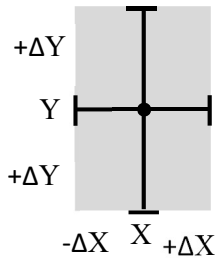
Exemple:

Soit l'expression de la vitesse ***v***: $v = \frac{x}{t}$

$$\delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot \delta t\right)^2} \Rightarrow \delta v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\cdot \delta x\right)^2 + \left(-\frac{x}{t^2}\cdot \delta t\right)^2} \Rightarrow$$

Les incertitudes sur le graphe

Il est courant d'étudier graphiquement une propriété, en fonction d'un paramètre, pour en *déduire* ou *vérifier* une ***loi*** les reliant.



Les ***rectangles d'incertitudes*** (ou les ***barres d'erreurs***) doivent être portés sur le graphe pour juger de la validité de l'interprétation.

Soit un point expérimental défini par les coordonnées : *X* affecté de l'incertitude ± δ*X*, et *Y* affecté de l'incertitude ± δ*Y*. Le tracé de ce point sur un graphe correspond au schéma ci contre.

La zone hachurée correspond à l'aire d'incertitude du point expérimental. Elle peut se réduire à une simple barre si l'une des incertitudes est très faible (on parlera alors de *barres d'erreurs*).

Une fois mis les rectangles d'erreur, on trace manuellement la meilleure courbe *passant au mieux dans tous les rectangles d'incertitude*.

Tracé du graphe

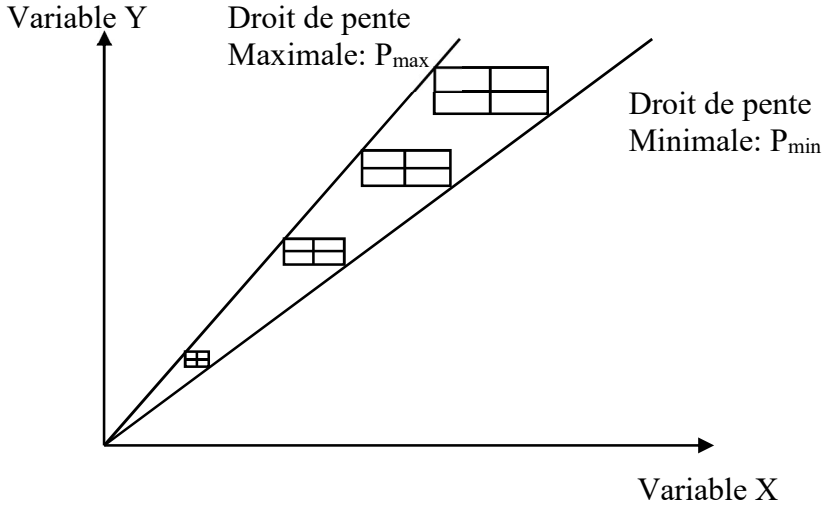
Pour obtenir, dans un temps raisonnable, un graphe exploitable où il est aisé d'analyser un phénomène, il est recommandé de suivre les neuf étapes suivantes:

1- Réaliser avec soin les différentes mesures et reporter les résultats dans un tableau.
2- Estimer les incertitudes δx et δy pour chaque couple (x,y) du tableau.
3- Choisir convenablement l'origine des axes (il n'est pas indispensable que l'origine des axes corresponde à $x = 0$ et $y = 0$).
4- Nommer les axes en indiquant les unités de x et de y.
5- Choisir une échelle adéquate pour chacun des deux axes (les points expérimentaux doivent se répartir sur une grande partie de la feuille utilisée).
6- Indiquer sur chaque axe, en suivant l'échelle, quelques points correspondant à des nombres entiers formant une progression arithmétique. (Les valeurs du tableau ne doivent en aucun cas figurer sur les axes).
7- Représenter les points expérimentaux par des croix (+).
8- Représenter les rectangles d'incertitudes de côtés $2\delta x$ et $2\delta y$ (il est possible que l'incertitude sur un axe soit négligeable, les *rectangles d'incertitude* deviennent alors des *barres d'erreur*).
9- Dessiner la courbe $Y(x)$ qui doit :

- couper tous les rectangles d'incertitude.
- Avoir une pente variant de façon continue (**pas de ligne brisée ni de zigzag**).
- Si $Y(x)$ **est une droite**, alors il existe tout un faisceau de droites passant par tous les rectangles d'incertitude. Il faut alors représenter deux droites : celle de **pente minimale** et celle de **pente maximale**.

La pente (P) et son incertitude (ΔP) s'écriront alors : $p_e = \bar{p}e \ \pm \delta p_e$

$$p_e = \frac{p_{emax} + p_{emin}}{2} \pm \frac{|p_{emax} - p_{emin}|}{2}$$



Graphe indicatif

Manipulation
Détermination de la constante de raideur K d'un ressort et estimation de son incertitude δK

Dispositif expérimental

- Potence munie d'une règle de longueur ***1m*** et une erreur systématique $\delta x_{sys} = 1\ mm$
- Un ressort (de longueur au repos $l_o = 100\ \ mm$).
- Six masses de 200 g à 700 g ($\delta M = 8\ g$)

Travail à effectuer

1- Accrocher le ressort à la potence, et mesurer sa longueur à vide l_o.

2- Accrocher au ressort une masse ***m***, attendre l'état d'équilibre, puis mesurer la nouvelle longueur ***l*** du ressort. En déduire l'*allongement* $x = (l - l_o)$ du ressort.

3- Donner successivement à la masse ***m*** des valeurs allant de 200g à 700g et noter les valeurs correspondantes de ***x***.

N.B. Pour chaque valeur de ***m***, trois mesures de ***x*** sont nécessaires. Puis on déduit la valeur moyenne de ***x*** et son incertitude δx. A la fin, on inscrit sur le tableau la valeur moyenne de ***x*** et son incertitude δx.

4- Mettre vos résultats de mesure dans le tableau1.

m(kg)	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**
x (m)						
δx(m)						

Tableau1 : l'allongement ***x*** en fonction de la masse ***m***.

5- Tracer le graphe représentant la variation de ***x*** en fonction de ***m***, en indiquant les rectangles d'incertitude (on supposera que les masses utilisées au laboratoire sont connues avec une incertitude de ± 8g).

6- Indiquer sur le graphe la pente maximale et la pente minimale, en déduire la valeur (moyenne) $\overline{p}_e$ de la pente ainsi que son incertitude δp_e.

7- Démontrer que la pente

$$p_e = \frac{g}{K}$$

g : accélération de la pesanteur
K : constante de raideur du ressort.

8- Sachant que $g = 9,80 \pm 0,02\ {}^{m}/_{s^2}$, déduire la constante de raideur ***K*** du ressort.

9- Exprimer l'incertitude δK en fonction de δp_e et δg, grâce à un calcul d'incertitude par la méthode logarithmique.

10- Présenter correctement le résultat final (c'est-à-dire la valeur de ***K***, son incertitude et sa précision δK).