Université Mostefa BENBOULAID- BATNA2

Socle Commun en Sciences et Technologie Année 2023/2024

Matière : M1

Série DE TD No.03

Exo No.01 : Calculer les limites des fonctions suivantes :

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{x}$ 2) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln\,(1+x^2)}{Sin^2(x)}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,x}{x-1}$ 5) $\lim_{x\to +\infty} x.Ln\,x - x^2+1$ 6) $\lim_{x\to 0} x.Ln\,x - x^2+1$

7) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x.\ln x}{x^2+1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ 9) $\lim_{x\to 0} x\,.E(1/x)$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x\,(\cos 2x - cosx)}$ 11) $\lim_{\substack{x\to \alpha\\ \alpha>0}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\propto}-\sqrt{x-\propto}}{\sqrt{x^2-\propto^2}}$

Exo No.02 : Soit $g(x)=4(x-1).E(x)+3$; E(x) : La partie entière du réel x.

1) $Soit\ x\epsilon\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$; $Montrer\ que$: $|g(x)-3|\le 4|x-1|$.
2) Montrer que :
   $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\epsilon R);\ \ (|x-1|<\alpha\ \Rightarrow\ |g(x)-3|<\varepsilon\,)$.
3) En déduire $\lim_{x\to 1} g(x)$

Exo No.03 : Soit $f:R\setminus\{1/3\}\to\ R\ \ tq\ \ f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}\ pourtout\ \varepsilon>0$;
Déterminer δ tq :

$$\left(x\neq\frac{1}{3}\right)\ et\ |x|\le\delta\ \ \Rightarrow\ \ |f(x)+3|\le\varepsilon$$

Exo No.04 : On considère la fonction définie sur $[-1{,}3]$par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^2} & si\ x\epsilon[-1{,}0[\\ \sqrt{x} & si\ x\epsilon[0{,}3]\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $[-1{,}3]$
2) Etudier la dérivabilité aux points $x_0=-1$, $x_1=0, x_2=3$
3) F est- elle injective sur $[-1{,}0]$ sur $[0{,}3]$
4) Déterminer l'ensemble image $[0{,}1/4]$

Exo No.05 : Calculer les dérivées et les domaines de définition des fonctions suivantes :

1) $\frac{x}{(x+3)^2}$; 2) x^{2x} 3) $\arccos\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$ 4) $\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

5) $\arctan x$ 6) $Sin\,(\ln(x))$

Exo No.06 : Soit f : R → R , une fonction telle que :

$$\forall\, x, y \in R\,, |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$$

1) Montrer que la fonction f est $2\pi - périodique$.
2) Montrer que f est Continue sur R.
3) Montrer que la fonction f est dérivable en $\pi/2$ et calculer $f'(\frac{\pi}{2})$.

Exercices supplémentaires :

Exo No.01 : Calculer les limites des fonctions suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-x-2}{3x^2+2x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{Cos\ x}{x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sin\ 3x}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{Sin\ x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x.Cos\ x}{x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Cos\ x - 1}{Sin^2\ x}$ 13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{Ln\ (1+e^{2x})}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - Cos\ x}{Sin^2(x)}$ 15)

Exo02 :

1) Etudier la continuité sur le domaine de définition de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-1)}$$

2) Montrer en utilisant la définition de la limite que :

$$a)\ \lim_{x\to 2} |3x+1| = 7 \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$

Exo03 :

Soient a et b deux réels

Soit $f: R \to R$, la fonction définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & si\ \ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ e^{bx} - x & si\ x > 0 \end{cases}$$

1) A l'aide de la règle de l'Hôpital , déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{Cos(x)x - \sin x}{x^2}$$

2) Déterminer a et b pour que f soit continue sur R.
3) Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur R.

Exercice No.01 :

1-Soient A,B et C trois ensembles non vides , Montrer que :

(a)- $A \cup B = A \cap C \quad \Rightarrow B \subset A \subset C$

(b)- $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

2- Soient A et B deux ensembles tels que :

A = $\left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ , } k \in Z\right\}$ **B =** $\left\{\frac{5\pi}{3} + 2k'\pi \text{ , } k' \in Z\right\}$

Montrer par l'absurde que **A⋂B=∅**

Exercice No.02 : Soient E et F deux ensembles et f : E → F une application. Démontrer

1-$\forall A, B \in P(E)$: $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$

2- $\forall$ ***A,B*** $\in$ ***P(E) : f est injective*** $\Leftrightarrow$ ***f(A⋂B)=f(A) ⋂ f(B)***

3-$(\forall A, B \in P(E)$ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

4-$(\forall A, B \in P(E))$ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

5- ***(∀A∈P(E))*** ***A*** $\subset f^{-1}(f(A))$

6- ***(∀B ∈P(F))*** ***f(***f^{-1}***(B)*** ***⊂B***

Exercice No.03 : Soit f et g deux applications tels que :

f : R+ → [0,1[**g : [1 ;+∞[→ R+**

x → $\frac{x^2}{x^2+1}$ **x →** $\sqrt{x-1}$

1°) Déterminer l'application fog

2°) Montrer que f est bijective

3°) Déterminer f^{-1} l'application réciproque de f

Exercice No.04 :

Soit f l'application définit par f : [1 ,+∞[→ R+

f(x) = $\sqrt{x^2 - |x|}$

1°) Montrer que f est bijective de [1 ,+∞[vers R+

2°) Déterminer f^{-1} l'application réciproque de f

Exercice No.05 : On considère dans l'ensemble des entiers naturels N* , la relation binaire R définie par :

$$\forall\, a , b \in N^* ;\ a R b \ \Leftrightarrow \exists\, k \in N^* \ / \quad b = k . a$$

1- Démontrer que R est une relation d'ordre .
2- N* est il totalement ou partiellement ordonné par R .

Exercice No.06

Soit R une relation définie sur R par :

$$\forall\, x,y \in R ,\ x R y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y)$$

1- Démontrer que R est une relation d'équivalence .
2- Déterminer **ā** la classe d'équivalence de l'entier a .

Exercices Supplémentaires :

Exo No.01 : Soient A ;B ;C des parties d'un ensemble E .

Montrer que **:**

1) **A =** $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{C})$.
2) **A = (A∪B)∩ (B∪C)∩(C∪A) = (A∩B)∪(B∩C)∪(C∩A)**
3) $A\cap\overline{B} = A\cap\overline{C} \ \Leftrightarrow A\cap B = A\cap C$

Exo No.02 : Soient A, B, C trois sous-ensembles de l'ensemble non vide E :

1. En utilisant les propriétés des opérations sur les ensembles montrer que :
   i) $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$
   ii) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.
2. **Soit** $A = \{ x \in \mathbb{R},\ \mid 2x \mid \leq 6 \}$, $\quad B = \{ x \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 5x - 6 \}$ **et**
   $$C = \{ x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 - 5 \leq 20 \}$$
   Déterminer les ensembles $A, B\ et\ C$, et vérifier la propriété i) donnée dans la question précédente.

Exo No.03 : Soit les deux applications :

$$f: x \to R \qquad\qquad g: Z \to R$$
$$n \to (-1)^n \qquad\qquad n \to Sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Est que f=g ?

Exo No.04 : Soit f : R → R

$$X \to \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle]-∞ , 1]

Exo No.05 :

Soit l'application **:** $x \ \to \ \frac{2}{x-1}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Université Mostefa BENBOULAID- BATNA2

Socle Commun en Sciences et Technologie Année 2022/2023

Matière : M1

Série DE TD No.01

Exercice No.01 : Donner les négations des propositions suivantes :

1- $\forall x \in R\ , x^2 - x + 4 \neq 0$

2-$\exists n \in N\ , n < \sqrt{2}\ \leq n + 1$

3-$\forall x \in R, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$

4-$\forall x \in R, |x^2| \geq 1\ et\ \sqrt{x^2}\ = x$

5-$\forall x \in R, -1 \leq sinx\ \leq 1$

6-$\forall x \in R, |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x = y = 0$

7- $\exists!\, x \in N\ , 2x - 8 = 0$

Exercice No.02 : Montrer que les insertions suivantes sont fausses :

1-$(\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; \mathbf{1}[)\ ; \frac{\mathbf{2x+1}}{\boldsymbol{x}^2(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^2)} < \mathbf{1}$

2-Pour tout entier naturel n , le nombre n^2 est impair.

3-$(\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R})(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}); \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{y}^2 = \mathbf{0}$

4-$(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}); \mathbf{3}\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{2}\ \boldsymbol{sin}^2(\boldsymbol{x})$

Exercice No.03 :

Soient $a, b \in R+$, Montrer que si $a \leq b\ \ \ alors\ \ \ a \leq \frac{a+b}{2} \leq b\ \ et\ a \leq \sqrt{ab} \leq b$

Exercice No.04 : En utilisant le raisonnement par Contraposition , Montrer que :

1) $(\forall x \in R^+); (x \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} \neq 1 - \sqrt{x}$
2) $(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R})(\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}); (\boldsymbol{xy} \neq \mathbf{1}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}) \Rightarrow \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}+\mathbf{1}} \neq \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{y}+\mathbf{1}}$

Exercice No.05 : En utilisant le raisonnement par récurrence , Montrer que :

1) $(\forall n \in N); 1 + 3 + 3^2 + \cdots \ldots \ldots .. + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$
2) $(\forall n \in N^*); 1 + \frac{1}{2^2} + + \cdots \ldots \ldots .. + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Exercice No.06

En Utilisant le raisonnement par l’absurde ; Montrer que :

1) $(\forall n \in N) \quad \sqrt{16n^2 + 8n + 3} \notin N$

2) $(\forall n \in N) \quad \frac{n+1}{n+2} \notin$ N

University of Batna 2 **2023/2024**

Faculty of technology **Dept of Sciences and Technology - LMD.**

Mathematics 1:

Tutorial session N° 3

Exercise n°1: Compute the limits of the following functions:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln\,(1+x^2)}{Sin^2(x)}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Ln\,x}{x-1}$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} x.Ln\,x-x^2+1$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} x.Ln\,x-x^2+1$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x.\ln x}{x^2+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} x\,.E(1/x)$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x\,(\cos 2x-cosx)}$ 11) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ \alpha>0}}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$

Exercise n°2: Let $g(x)=4(x-1).E(x)+3$; E(x): the integer part of the real number x.

1) $Let\ x\epsilon\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$; $show\ that:\ |g(x)-3|\leq 4|x-1|.$
2) Show that:
 $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\epsilon R);\quad (|x-1|<\alpha\ \Rightarrow\ |g(x)-3|<\varepsilon).$
3) Then, deduce that $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

Exercise n°3: Let $f:R\setminus\{1/3\}\to\ R\ \ tq\ \ f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}\ \ for\ all\ values\ of\ \varepsilon>0$;
Obtain δ such that:

$$\left(x\neq\frac{1}{3}\right)\ et\ |x|\leq\delta\ \ \Rightarrow\ |f(x)+3|\leq\varepsilon$$

Exercise n°4: Consider the function defined on $[-1,3]$ by:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^2} & si\ x\epsilon[-1,0[\\ \sqrt{x} & si\ x\epsilon[0,3]\end{cases}$$

1) Show that the function f is continuous on $[-1,3]$
2) Determine whether the function f is differentiable at the points $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=3$
3) Is the function f injective from $[-1,0]$ to $[0,3]$
4) Obtain the image set of $[0,1/4]$

Exercise n°5: Compute the derivatives as well as the domains of the following functions:

1) $\dfrac{x}{(x+3)^2}$; 2) x^{2x} 3) $\arccos\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$ 4) $\arcsin\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$

5) $\arctan x$ 6) $Sin\,(\ln(x))$

Exercise n°6: Let f: R → R, be a function, such that:

$$\forall\, x, y \in R\,, |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$$

1) Show that the function f is periodic, with period 2π
2) Show that the function f is continuous on R.
3) Show that the function f is differentiable at $\pi/2$ and compute $f'(\frac{\pi}{2})$.

Additional Exercises:

Exercise n°1: Compute the limits of the following functions:

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x-2}{3x^2+2x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Cos\ x}{x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sin\ 3x}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{Sin\ x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x.Cos\ x}{x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Cos\ x - 1}{Sin^2\ x}$ 13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Ln\ (1+e^{2x})}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - Cos\ x}{Sin^2(x)}$ 15)

Exercise n°2:

1) Investigate the continuity of the following function over its domain:

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-1)}$$

2) Use the formal definition of the limit to prove:

$$a)\ \lim_{x\to 2}|3x+1| = 7 \qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$

Exercise n°3:

Le a and b be real numbers

Let $f: R \to R$, be a function defined by:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & si\ \ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ e^{bx} - x & si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Applying l'Hôpital's rule, evaluate the following limit:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Cos(x)x - \sin x}{x^2}$$

2) Find the values of a and b so that f be continuous on R.
3) Find the values of a and b so that f be differentiable on R.