

Chapitre 1

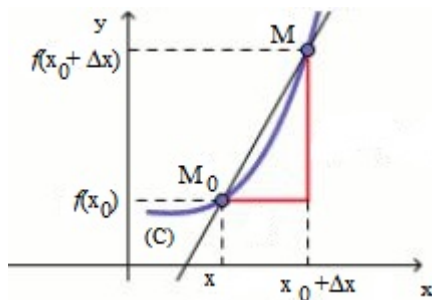
RAPPELS MATHÉMATIQUES

« Great hopes make great men »

Thomas Fuller

1.1 Dérivées

Soit la fonction $y = f(x)$, de graphe (C) définie dans un intervalle I; deux points $M_0[x_0, y_0 = f(x_0)]$ et $M[x, y = f(x)]$ (voir la figure ci-dessous).



On appelle dérivée de la fonction au point M_0 d'abscisse x_0 la limite si elle existe du rapport :

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Ou $f' = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_0}$

Par extension, on note : $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

la dérivée de la fonction $y = f(x)$ en tout point M d'abscisse x de l'intervalle I.

1.1.1 Dérivée partielle

la dérivée partielle d'un champ scalaire de plusieurs variables est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes.

1.1.2 Dérivée premières (d'ordre 1)

Soit la fonction $f(x, y, z)$, la dérivée partielle première de f par rapport à ces variables x_i est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Pour simplifier, on utilise parfois f'_x . on écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z) \xrightarrow{f'_x} f'_x = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{y, z = \text{Const}} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ f(x, y, z) \xrightarrow{f'_y} f'_y = \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{x, z = \text{Const}} = \frac{\partial f}{\partial y} \\ f(x, y, z) \xrightarrow{f'_z} f'_z = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{x, y = \text{Const}} = \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. \Rightarrow df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1.1)$$

Ex. 1 : Calculer les dérivées partielles de $f(x, y, z) = 2(xy + yz + xz)$ qui associe à la surface du parallélépipède dont les longueurs d'arêtes sont x, y, z .

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2(y + z) \\ f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + z) \\ f'_z = \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x + y) \end{array} \right. \quad (1.2)$$

1.1.3 Dérivée partielle d'ordre 2

Soit la fonction f de trois variables x, y et z , la dérivée partielle seconde (d'ordre 2) de f est 'ecrit :

* $f'_x(x, y, z)$ se dérivée en :

$$\left\{ \begin{array}{l} f''_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] \\ f''_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] \\ f''_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right] \end{array} \right. \quad (1.3)$$

* $f'_y(x, y, z)$ se dérivée en :

$$\left\{ \begin{array}{l} f''_{yx}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] \\ f''_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\ f''_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right] \end{array} \right. \quad (1.4)$$

* $f'_z(x, y, z)$ se dérivée en :

$$\left\{ \begin{array}{l} f''_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right] \\ f''_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right] \\ f''_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Ex. 2 : Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 pour le même exemple $f(x, y, z) = 2(xy + yz + xz)$.

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2(y + z) \left\{ \begin{array}{l} f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \\ f''_{zx} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2 \end{array} \right. ; \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + z) \left\{ \begin{array}{l} f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \\ f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \\ f''_{zy} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2 \end{array} \right. ; \quad f'_z = \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x + y) \left\{ \begin{array}{l} f''_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2 \\ f''_{yz} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2 \\ f''_{zz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right.$$

1.2 OPERATEURS

La plupart des phénomènes physiques sont décrits par des équations différentielles qui impliquent des opérateurs différentielles. Nous allons nous attacher dans cette partie à étudier leurs significations et à établir leurs expressions dans divers systèmes de coordonnées.

1.2.1 Opérateur Nabla $\vec{\nabla}$

C'est le plus simple des opérateurs différentiels. Il se note : ∇ , s'appelle nabla. L'opérateur nabla se définit :

— En coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1.6)$$

— En coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1.7)$$

— En coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (1.8)$$

1.2.2 Gradient

Etant donné un champ scalaire $f(x, y, z)$. On appelle gradient du champ $f(x, y, z)$, le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}}.f = \vec{\nabla}.f \quad (1.9)$$

— En coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla}.f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (1.10)$$

— En coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla}.f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (1.11)$$

— En coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla}.f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (1.12)$$

1.2.3 Divergence

Soit $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$, On appelle divergence du vecteur \vec{A} , le scalaire :

$$\text{div}.\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} \quad (1.13)$$

— En coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.14)$$

— En coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.15)$$

— En coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.16)$$

1.2.4 Rotation

champ de vecteurs $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$, on appelle rotationnel du vecteur $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$, le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (1.17)$$

— En coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \vec{k} \quad (1.18)$$

— En coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) \vec{u}_z \quad (1.19)$$

— En coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{A} = \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right) \frac{1}{r \sin \theta} \vec{u}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \quad (1.20)$$

1.2.5 Laplacien Δ

Laplacien vectoriel

Le laplacien s'applique également à un champ vectoriel. Dans ce cas il renvoie un autre champ vectoriel et se note $\Delta \vec{A}(M, t)$.

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

En coordonnées cartésiennes, les vecteurs unitaires étant fixes, le laplacien vectoriel d'un champ \vec{A} est tout simplement, un vecteur dont les composantes sont les laplaciens scalaires des composantes de \vec{A} :

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x) \vec{i} + (\Delta A_y) \vec{j} + (\Delta A_z) \vec{k} \quad (1.21)$$

Laplacien scalaire

L'opérateur laplacien scalaire est un opérateur différentiel d'ordre deux qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire. Le laplacien scalaire s'obtient en prenant la divergence du gradient et se note $\Delta f(M, t)$.

$$\Delta f(M, t) = \text{div}(\vec{\text{grad}} f(M, t)) = \nabla^2 f(M, t) \quad (1.22)$$

— En coordonnées cartésiennes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.23)$$

— En coordonnées cylindriques

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.24)$$

— En coordonnées sphériques

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1.25)$$

Ex. 5 : Un point $M(x, y, z)$ étant repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, de module r :

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Calculer : 1) $\vec{\text{grad}} r$, $\vec{\text{grad}} \frac{1}{r}$, 2) $\text{div} \vec{r}$, $\text{rot} \vec{r}$

$\vec{\text{grad}} r$

On a : $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Les composantes du gradient sont :

$$\vec{\text{grad}} r = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \vec{u}$$

Le vecteur \vec{u} représente le vecteur unitaire de la direction du vecteur r .

$\vec{\text{grad}} \frac{1}{r}$

Ses composantes sont :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}$$

d'où :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{x}{r^3}\vec{i} + \frac{y}{r^3}\vec{j} + \frac{z}{r^3}\vec{k}\right) = -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = -\frac{\vec{u}}{r^2}$$

$\text{div}\vec{r}$

$$\text{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

C'est bien un scalaire. La divergence définit un champ de vecteurs divergent à partir de l'origine O.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{r} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{r} = \vec{0}$$

1.3 Moment d'un vecteur

Moment d'un vecteur par rapport à un point :

Le moment d'un vecteur \vec{OA} par rapport à un point O est donnée par :

$$M_{/O}(\vec{AB}) = \vec{OA} \wedge \vec{AB} \tag{1.26}$$

Moment d'un vecteur par rapport à un axe :

Le moment du vecteur \vec{OA} par rapport à un axe Δ est la mesure algébrique de la projection sur l'axe du moment par rapport au point O (Fig.1.1) :

$$M_{/\Delta}(\vec{AB}) = M_{/O} \wedge \vec{u} \tag{1.27}$$

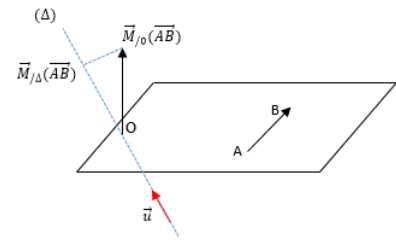


FIGURE 1.1 – Moment d'un vecteur

1.3.1 Flux d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ et une surface élémentaire dS (Fig. 1.2 (a)).

Flux élémentaire

$$d\Phi = \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{N} dS \tag{1.28}$$

Où \vec{N} est le vecteur unitaire normal à la surface dS , qu'il convient de bien orienter, en tenant compte des conventions qui vont être précisées.

Flux à travers une surface ouverte

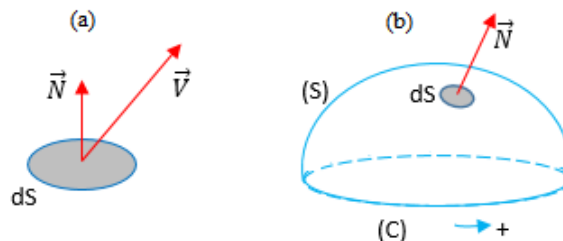
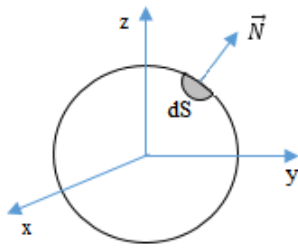


FIGURE 1.2 – Flux d'un vecteur

Soit (C) le contour sur lequel s'appuie la surface (S). Une fois (C) orienté, le sens du vecteur unitaire \vec{N} est défini par la règle du tirebouchon (sens dans lequel avance le tirebouchon quand on le tourne dans le sens positif choisi sur (C)). On a alors (Fig. 1.2 (b)) :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{N} dS \tag{1.29}$$

Ex. 8 : Champ à symétrie sphérique



Calculer le flux du vecteur $\vec{V}(M) = f(r)\vec{e}_r$ à travers une sphère de centre O et de rayon r .

On a tout simplement :

$$\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{N} dS = \iint_S f(r) dS = 4\pi r^2 f(r)$$

1.4 ANGLE SOLIDE

1.4.1 Rappel angle plan

L'angle plan est la portion de plan comprise entre deux demi-droites Oa et Ob issues d'un point O (Fig. 1.3 (a)). En dessinant un cercle de centre O et de rayon r quelconque, la valeur de θ , exprimée en radians, est le rapport de la longueur de l'arc de cercle $l = AB$ (compris entre les deux demi-droites) et le rayon r :

$$\theta = l_1/r_1 = l_2/r_2 = cste \tag{1.30}$$

1.4.2 Définition de l'angle solide

Considérons une sphère de centre O et de rayon r quelconque. On définit l'angle solide Ω sous lequel on voit une surface (S) à partir d'un point O, comme étant la portion d'espace contenue dans un cône de sommet O (Fig. 1.3 (b)). Les surfaces (S1), (S2) et (S3) sont vues de O sous le même angle solide Ω .

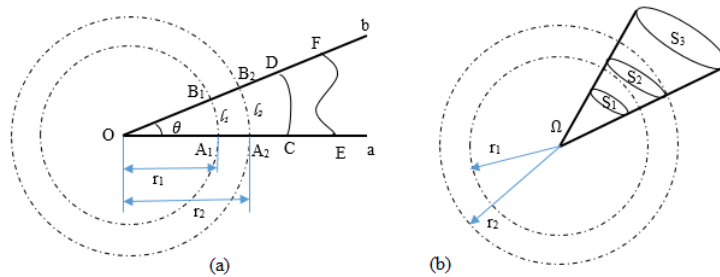
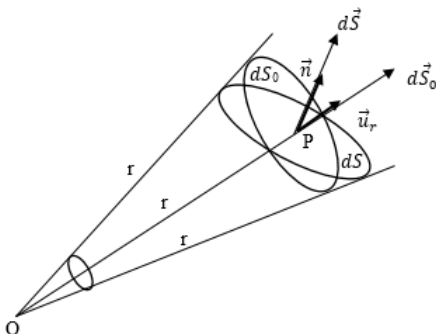


FIGURE 1.3 – (a) : Angle plan, (b) : Angle solide

1.4.3 Angle solide élémentaire



Par définition l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit une surface élémentaire dS à partir d'un point donné O est :

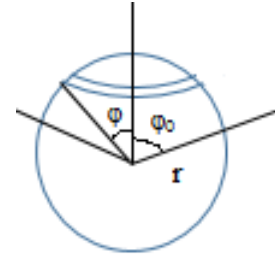
$$d\Omega = \frac{dS \cos\alpha}{r^2} = \frac{dS \vec{n} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \tag{1.31}$$

Dans le cas où l'élément dS est pris sur la sphère de centre O et de rayon r , on a tout simplement :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \cdot \vec{N} = \frac{dS}{r^2} \tag{1.32}$$

Ex. 9

- † Espace entier : $\Omega = \frac{1}{r^2} \iint_S dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.$
- † Demi-espace entier : $\Omega = 2\pi.$
- † Cône de demi-angle au sommet $\varphi_0.$



$$dS = 2\pi r \sin\varphi r d\varphi = 2\pi r^2 \sin\varphi d\varphi$$

$$\Omega = \iint_S \frac{dS}{r^2} = \int_0^{\varphi_0} 2\pi \sin\varphi d\varphi = 2\pi(1 - \cos\varphi_0)$$

1.5 Intégrales

Soient $F(x)$ et $f(x)$ deux fonctions définies sur un intervalle I , on dit que $F(x)$ est une fonction primitive ou intégrale de $f(x)$ si et seulement $F(x)$ admet pour dérivée $f(x)$ dans cet intervalle :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Si a et b représentent les limites de cet intervalle, on écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Si $f(x)$ est une fonction continue, $F(x) = \int f(x)dx$ représente l'aire limitée par la courbe C représentative de la fonction $f(x)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

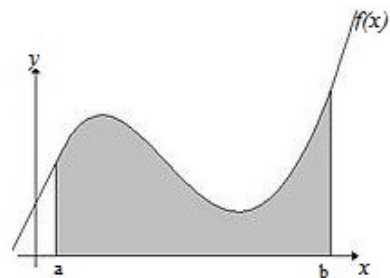


Tableau des primitives usuelles

$\int a dx = ax + C; a = Cte$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C; \text{ si } n \neq -1$	$\int \frac{1}{x} dx = \text{Log} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \text{Log} x \times dx = x \text{Log} x + C$	$\int u \times dv = u.v + \int v.du; \text{ intégration par parties}$	

1.5.1 Intégrales multiples

Est une forme d'intégrale qui s'applique aux fonctions de plusieurs variables réelles (deux ou trois).

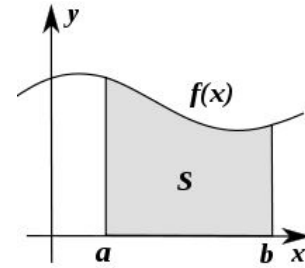
Intégrale linéique

Lorsque f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, alors f admet une primitive notée F . On a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.33}$$

Physiquement, l'intégrale ci-dessus est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la fonction f entre $x = a$ et $x = b$. On peut aussi réécrire :

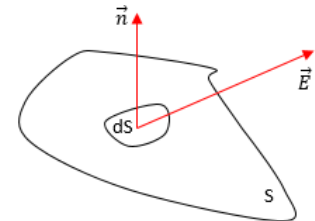
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (1.34)$$



Intégrale double (de surface)

Le flux du champ de vecteur \vec{E} à travers une surface dont le vecteur unitaire normal à la surface \vec{n} s'écrit $d\vec{S} = dS \vec{n}$

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.35)$$



Le flux correspond à la quantité intégrée du champ de vecteur traversant la surface S. La seule composante du champ \vec{E} qui va intervenir dans le flux est la composante parallèle à \vec{n} . puisque la composante perpendiculaire à la surface ne peut pas la traverser.

Ex. 3 : Calculer le flux du champ électrostatique crée par une charge Q ponctuelle à travers une sphère de rayon R. Le champ électrostatique est radial et s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

où r est la distance à la charge. Montrer que le flux dépend que de la charge.

Dans une sphère, la surface est : $S = \iint r d\theta . r \sin\theta . d\varphi$ et le vecteur unitaire normal à la surface est radiale : $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$.

On a :

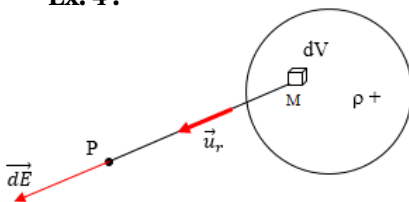
$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{kQ}{r^2} r d\theta r \sin\theta d\varphi = \frac{kQ}{r^2} r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Phi = kQ \int_0^\pi \sin\theta d\theta [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi kQ [-\cos\theta]_0^\pi = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \Phi \text{ est indépendant de R}$$

Intégrale triple

On peut poursuivre la généralisation dans l'espace. Voyons sur une application tiré de l'électrostatique.

Ex. 4 :



Soit une distribution de charges réparties dans un volume V telle qu'en un point courant M de V, la densité de charge volumique vale $\rho(M)$. Cela signifie que pour un volume élémentaire dV autour d'un point M, la charge que porte le volume dV vaut $dq = \rho dV$.

En un point P, le champ électrostatique généré par la charge dq présente en M vaut :

$$d\vec{E}(p) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 MP^2} \vec{u}_r = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 MP^2} \vec{u}_r$$

\vec{u}_r est le vecteur unitaire de même sens et même direction que \vec{MP} .

Pour obtenir le champ généré par l'intégralité des charges du volume V, Nous utilisons l'intégrale triple. On note alors :

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \iiint \frac{\rho \vec{u}_r}{4 \pi \epsilon_0 MP^2} dV \quad \text{avec} \quad dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\rho \vec{u}_r}{4 \pi \epsilon_0 MP^2} \iiint r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\rho \vec{u}_r}{4 \pi \epsilon_0 MP^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\rho \vec{u}_r}{4 \pi \epsilon_0 MP^2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\rho \vec{u}_r}{4 \pi \epsilon_0 MP^2} \left[\frac{R^3}{3} \right] [2] [2\pi] \\ \vec{E}(P) &\Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 MP^2} \vec{u}_r \end{aligned}$$

Chapitre 2

ÉLECTROSTATIQUE

*« Learning never exhausts the
mind »*

Leonardo Da Vinci

I.1. CHARGES

Dans tout phénomène physique intervient un « objet ». En électrostatique, l'objet est une charge, mesurée en coulomb (C) dans le système international.

Il existe deux types de charge électrique : « positives » et « négatives ».

les charges de même nature se repoussent tandis que celles qui sont de nature différente s'attirent.

Toute charge est multiple de la charge élémentaire :

$$e = 1,6.10^{-19} \text{ [C]}$$

Les atomes sont constitués de particules chargées, à savoir :

* les électrons : (e^-) responsables de la conduction électrique dans les métaux :

$$\text{charge : } q_e = e = 1,6.1019 \text{ C,} \quad \text{masse : } m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$$

* les protons : (p^+)

$$\text{charge : } q_p = e = 1,6.10^{-19} \text{ C,} \quad \text{masse : } m_p = 1,67.10^{-24} \text{ kg}$$

ainsi que les ions et les porteurs de charge dans les semi-conducteurs qui peuvent être des électrons ou des « trous » (absence d'électrons).

On distingue :

- **les charges ponctuelles** : supposées sans dimension (similaire au point matériel en mécanique).
- **les distributions continues de charge** : hypothèse d'une charge élémentaire dq , où quelle on peut appliquer les formules établies dans une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution. On définit ainsi les densités (Voir Tableau 2.1) :

TABLEAU 2.1 – Type de distributions

Distributions	Formules	Figures
linéique	$\lambda = dq/dl \Rightarrow dq = \lambda dl$	
surfaccie(surperficielle)	$\sigma = dq/dS \Rightarrow dq = \sigma dS$	
volumique	$\rho = dq/d\tau \Rightarrow dq = \rho d\tau$	

I.2. CHARGE PONCTUELLE

I.2.1. INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE

Expérience : Soit deux systèmes chargés électriquement, on observe deux types interactions s'exercent l'un sur l'autre :

- Les charges de même signe (+) (+) ou (-) (-) se repoussent (Fig. 2.1 (a)).
- Les charges de signes opposés (+) (-) ou (-) (+) s'attirent (Fig. 2.1 (b)).

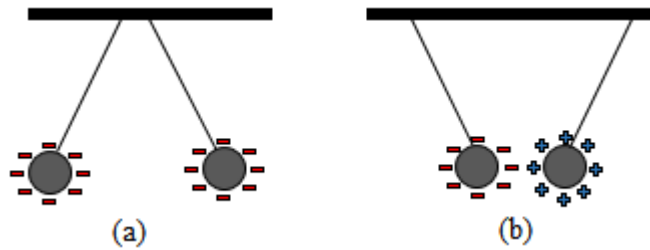


FIGURE 2.1 – Interaction électrique : (a) : répulsion, (b) : attraction

I.2.2. LOI DE COULOMB

Coulomb a effectué, en 1785, une série de mesures, pour déterminer les caractéristiques de la force d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles Q_1 et Q_2 séparées par une distance r . (Fig. 2.2) :

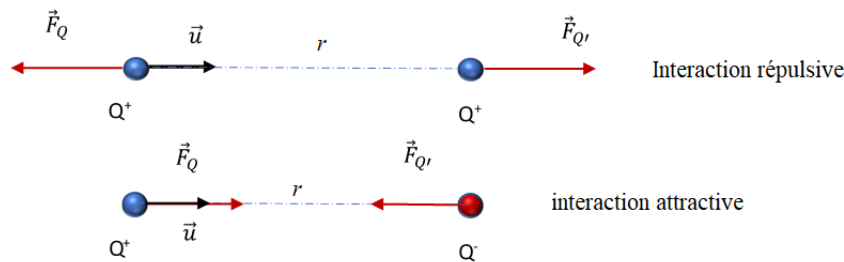


FIGURE 2.2 – Représentation vectorielle de la force électrostatique

- * Proportionnelle au produit des charges $Q_1 Q_2$.
- * Dirigé suivant la droite joignant les deux charges.
- * Inversement proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare.
- * Lorsque les charges sont de même signe, le produit $Q_1 Q_2$ est positif et les forces d'interaction sont répulsives.
- * Lorsque les charges sont de signe opposé, le produit $Q_1 Q_2$ est négatif et les forces d'interaction sont attractives.

Dans les deux cas, en définissant un vecteur unitaire dirigé de Q_1 vers Q_2 , on peut exprimer la force exercée par Q_1 sur Q_2 sous la forme vectorielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad [\text{N}] \\ \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \quad \text{et} \quad \|\vec{F}_{1/2}\| = \|\vec{F}_{2/1}\| \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI} \\ \vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

— k : est la constante de Coulomb ; ϵ_0 : est la permittivité du vide.

— Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles et dans le vide.

Principe de superposition

Considérons trois charges ponctuelles Q_1 , Q_2 et Q fixées en A, B et M respectivement (Fig. 2.3). L'expérience montre que la force exercée par Q_1 et Q_2 sur la charge Q est la somme vectorielle des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k \frac{Q Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + k \frac{Q Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} \quad (2.2)$$

Il ya ainsi indépendance des effets. Ceci constitue le principe de superposition qui est vérifié quelque soit le nombre de charges en présence.

Pour n charges ponctuelles :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = kQ \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad (2.3)$$

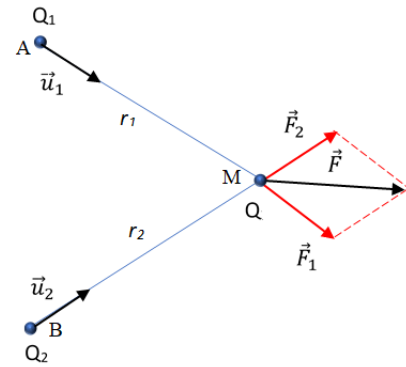
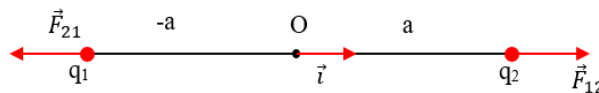


FIGURE 2.3 – Principe de superposition

Application 1 : Soient deux charges ponctuelles $q > 0$ identiques, placées en $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ sur l'axe ox . Représenter sur un schéma le vecteur force agissant sur les deux charges. Détermine l'intensité forces répulsives.



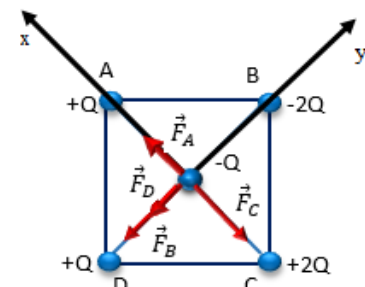
On a : $q_1 = q_2 = q$ et $r_{12} = r_{21} = 2a$

$$\begin{cases} \vec{F}_{12} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} \\ \vec{u}_{12} = \vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_{12} = k \frac{q^2}{4 a^2} \vec{i} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \vec{u}_{21} \\ \vec{u}_{21} = -\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_{21} = -k \frac{q^2}{4 a^2} \vec{i} = -\vec{F}_{12}$$

Application 2 : quatre charges ponctuelles sont placées aux sommets d'un carré ABCD de côté $a = 2$ m, $q_A = Q$, $q_B = -2Q$, $q_C = 2Q$, $q_D = Q$ et $Q = 2 \times 10^{-8}$ C (voir la figure ci-dessous). Calculer la résultante des forces qui s'applique à la charge $(-Q)$ placée au centre du carré O.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

$$\begin{cases} \vec{F}_A = F_A \vec{i} \\ \vec{F}_B = -F_B \vec{j} \\ \vec{F}_C = -F_C \vec{i} \\ \vec{F}_D = -F_D \vec{j} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} F_A = k \frac{q_A q_O}{OA^2} = k \frac{Q^2}{OA^2} \\ F_B = k \frac{q_B q_O}{OB^2} = k \frac{2 Q^2}{OB^2} \\ F_C = k \frac{q_C q_O}{OC^2} = k \frac{Q^2}{OC^2} \\ F_D = k \frac{q_D q_O}{OD^2} = k \frac{2 Q^2}{OD^2} \end{cases}$$



On remarque que : $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2 = r^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{2}$

$$\begin{cases} F_A = k \frac{q_A q_O}{OA^2} = k \frac{2Q^2}{a^2} \\ F_B = k \frac{q_B q_O}{OB^2} = k \frac{4Q^2}{a^2} \\ F_C = k \frac{q_C q_O}{OC^2} = k \frac{4Q^2}{a^2} \\ F_D = k \frac{q_D q_O}{OD^2} = k \frac{2Q^2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_A = 2k \frac{Q^2}{a^2} \vec{i} \\ \vec{F}_B = -4k \frac{Q^2}{a^2} \vec{j} \\ \vec{F}_C = -4k \frac{Q^2}{a^2} \vec{i} \\ \vec{F}_D = -2k \frac{Q^2}{a^2} \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = (2k \frac{Q^2}{a^2} - 4k \frac{Q^2}{a^2}) \vec{i} + (-4k \frac{Q^2}{a^2} - 2k \frac{Q^2}{a^2}) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -2k \frac{Q^2}{a^2} \vec{i} - 6k \frac{Q^2}{a^2} \vec{j} = -2k \frac{Q^2}{a^2} (\vec{i} + 3\vec{j}) \Rightarrow \|\vec{F}\| = 2k \frac{Q^2}{a^2} \sqrt{1^2 + 3^2} = 2k \frac{Q^2}{a^2} \sqrt{10} \text{ C}$$

A.N

$$\begin{cases} \vec{F} = -2 \times 9 \times 10^9 \times \frac{(2 \times 10^{-8})^2}{(2 \times 10^{-2})^2} (\vec{i} + 3\vec{j}) = -18 \times 10^{-3} (\vec{i} + 3\vec{j}) \\ \|\vec{F}\| = 18\sqrt{10} 10^{-3} = 56.92 \end{cases} \quad [\text{N}]$$

1.2.3. CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Le champ électrostatique est une modification de l'espace, créée par la présence de charges électriques. Ce champ est centrifuge (convergent) ou centripète (divergent) si la charge Q positive ou négative (Voir la Fig. 2.4).

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (2.4)$$

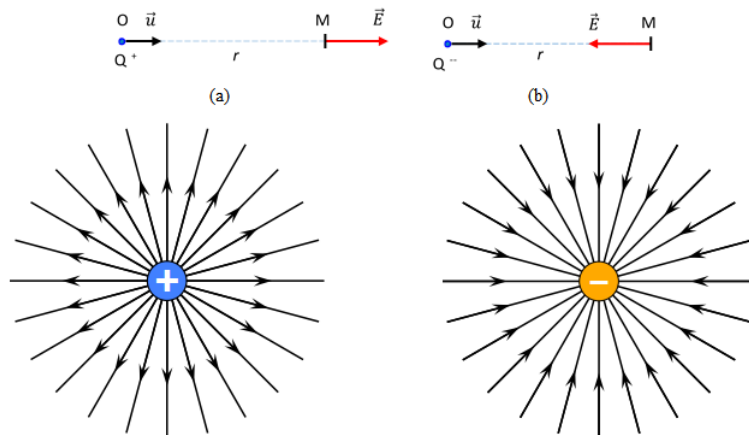


FIGURE 2.4 – Notation vectorielle du champ \vec{E}

1. Créé par une charge ponctuelle

On considère deux charges Q et Q_M placées en O et M respectivement. d'après la loi de Coulomb, la charge Q_M subit une force (Fig. 2.5) :

$$\vec{F} = k \frac{Q Q_M}{r^2} \vec{u} \quad (2.5)$$

De même si on suppose une autre charge Q'_M :

$$\vec{F}' = k \frac{Q Q'_M}{r^2} \vec{u} \quad (2.6)$$

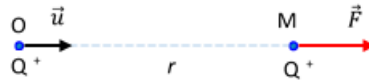


FIGURE 2.5 – La force électrique

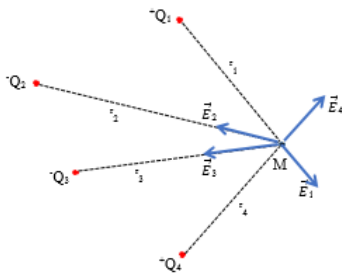
On déduit que la présence de la charge Q au point O modifie les propriétés de l'espace en créant un champ électrique :

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u} \quad (2.7)$$

La force de Coulomb qui s'exerce sur une charge quelconque Q_M placée en M peut alors s'écrire :

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q_M \quad [N] \quad (2.8)$$

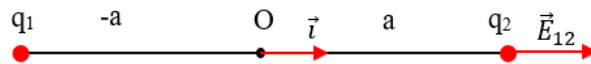
2. Distribution discrète de charges



Lorsque n charges ponctuelles existent simultanément en n points, le principe de superposition permet d'écrire le :

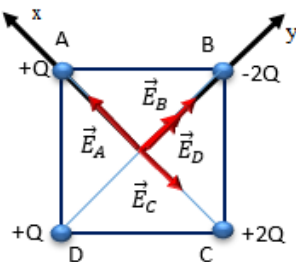
$$\vec{E} = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad (2.9)$$

Application 3 : Calculer le champ électrostatique créé par la charge q_1 au point (2) (Application 1).



$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(2) &= \vec{E}_{12} = K \frac{q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}(2) \\ \vec{u}_{12} &= \vec{i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}(2) = k \frac{q_1}{4 a^2} \vec{i}$$

Application 4 : Calculer le champ électrostatique créé par les quatres charges (Application 2) au centre du carré O .



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

$$\text{Et : } \vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}_A = E_A \vec{i} \quad ; \quad \vec{E}_B = E_B \vec{j} \quad ; \quad \vec{E}_C = -E_C \vec{i} \quad ; \quad \vec{E}_D = E_D \vec{j}$$

On remarque que : $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2 = r^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{2}$

$$\left\{ \begin{aligned} E_A &= k \frac{q_A}{OA^2} = k \frac{Q}{\frac{a^2}{2}} \\ E_B &= k \frac{q_B}{OB^2} = k \frac{2Q}{\frac{a^2}{2}} \\ E_C &= k \frac{q_C}{OC^2} = k \frac{Q}{\frac{a^2}{2}} \\ E_D &= k \frac{q_D}{OD^2} = k \frac{2Q}{\frac{a^2}{2}} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{E}_A &= 2 k \frac{Q}{a^2} \vec{i} \\ \vec{E}_B &= 4 k \frac{Q}{a^2} \vec{j} \\ \vec{E}_C &= -4 k \frac{Q}{a^2} \vec{i} \\ \vec{E}_D &= 2 k \frac{Q}{a^2} \vec{j} \end{aligned} \right. \Rightarrow \vec{E} = (2 k \frac{Q}{a^2} - 4 k \frac{Q}{a^2}) \vec{i} + (4 k \frac{Q}{a^2} - 2 k \frac{Q}{a^2}) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -2k \frac{Q}{a^2} \vec{i} + 6k \frac{Q}{a^2} \vec{j} = 2k \frac{Q}{a^2} (-\vec{i} + 3\vec{j}) \Rightarrow \|\vec{E}\| = 2k \frac{Q}{a^2} \sqrt{1^2 + 3^2} = 2k \frac{Q}{a^2} \sqrt{10} \text{ C}$$

A.N

$$\begin{cases} \vec{E} = 2 \times 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-8}}{(2 \times 10^{-2})^2} (-\vec{i} + 3\vec{j}) = 9 \times 10^5 (-\vec{i} + 3\vec{j}) \\ \|\vec{E}\| = 9\sqrt{10} \times 10^5 = 2.85 \times 10^6 \end{cases} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

I.2.4. POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

La charge électrique peut être décrite par un vecteur (champ électrique \vec{E}) ou par une grandeur scalaire (potentiel électrique V). On peut donc caractériser la perturbation du milieu due à la présence de charges électriques par une fonction scalaire : le potentiel V .

Le potentiel est lié au travail accompli pour transporter une charge d'un point à l'autre.
Le champ électrostatique n'existe que s'il y a une variation de potentiel entre deux points.

Champ électrique = variation du potentiel dans l'espace

Le champ électrique est dérivé d'un potentiel V :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

† Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

† Coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) \quad \text{Si } \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \rightarrow \text{Coordonnées polaires}$$

† Coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right)$$

1. Créé par une charge ponctuelle

Pour une charge ponctuelle Q_M en un point M distant r , le potentiel créé est donné par :

$$V = K \frac{Q}{r} + \text{Cste} \quad [V \equiv \text{Volt}] \quad (2.11)$$

Généralement V est nul à l'infin. Dans ce cas le potentiel s'écrit :

$$V = K \frac{Q}{r} \quad \text{Cste} = 0 \quad (2.12)$$

2. Potentiel créé par ensemble de charges

Le potentiel créé par n charges ponctuelles est la somme algébrique des potentiels créés par toutes les charges :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = K \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (2.13)$$

r_i : la distance qui sépare la charge du point d'étude M. Ce dernier étant nul à l'infini.

Application 5 : Calculer le potentiel électrostatique créé par les deux charge q_1 et q_2 au point (O) (Application 1).

$$\text{On a : } V(O) = V_1 + V_2 \text{ et } \left. \begin{array}{l} V_1 = k \frac{q_1}{r_1} \text{ et } r_1 = a \\ V_2 = k \frac{q_2}{r_2} \text{ et } r_2 = a \end{array} \right\} \Rightarrow V(O) = \frac{k}{a} (q_1 + q_2) = 2 \frac{k q}{a}$$

Application 6 : Calculer le potentiel électrostatique créé par les quatres charges (Application 2) au centre du carré O.

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = V_A + V_B + V_C + V_D \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} V = k \frac{Q}{r} \\ OA = OB = OC = OD = \sqrt{r^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$V_A = \sqrt{2} k \frac{Q}{a} ; V_B = -2\sqrt{2} k \frac{Q}{a} ; V_C = 2\sqrt{2} k \frac{Q}{a} ; V_D = \sqrt{2} k \frac{Q}{a}$$

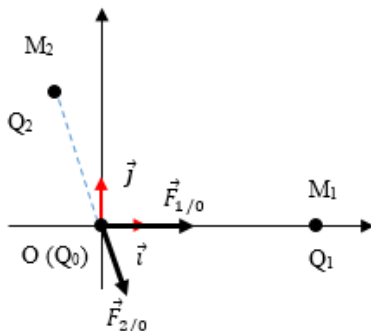
$$\Rightarrow V = 2\sqrt{2} k \frac{Q}{a}$$

A.N

$$V = 2\sqrt{2} \times 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-8}}{2 \times 10^{-2}} = 2.55 \times 10^5 \text{ [V]}$$

Application 7 : Dans un repère orthomormé (O, x, y) , on dispose trois charges électriques : $Q_0 = 1 \mu\text{C}$ au point $O(0,0)$, $Q_1 = -2 \mu\text{C}$ au point $M_1(5,0)$ et $Q_2 = 3 \mu\text{C}$ au point $M_2(-1,3)$. Les coordonnées sont exprimées en cm.

1. Calculer la force F s'exerçant sur la charge Q_0 placée en O.
2. En déduire les composantes du vecteur champ électrique \vec{E} et son intensité E .
1. La force F qui s'exere sur la charge Q_0 est la somme des forces F_1 et F_2 appliquée par les charges Q_1 et Q_2 respectivement :



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{F}_1 = k \frac{Q_1 Q_0}{M_1 O^2} \vec{u}_{M_1 O} = k \frac{Q_1 Q_0}{M_1 O^3} \overrightarrow{M_1 O} \\ \vec{F}_2 = k \frac{Q_2 Q_0}{M_2 O^2} \vec{u}_{M_2 O} = k \frac{Q_2 Q_0}{M_2 O^3} \overrightarrow{M_2 O} \\ \vec{u}_{M_i O} = \frac{\overrightarrow{M_i O}}{M_i O} \end{array} \right.$$

Sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{M_1 O} = 5 \vec{i} \text{ [cm]} = 0.05 \vec{i} \text{ [m]} \Rightarrow \|\overrightarrow{M_1 O}\| = 0.05 \text{ [m]} \\ \overrightarrow{M_2 O} = (-\vec{i} + 3 \vec{j}) \text{ [cm]} = (-0.01 \vec{i} + 0.03 \vec{j}) \text{ [m]} \Rightarrow \|\overrightarrow{M_2 O}\| = \sqrt{(-0.01)^2 + 0.03^2} = 0.032 \text{ [m]} \end{array} \right.$$

On Obtient :

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_0}{M_1 O^3} \vec{M_1 O} + k \frac{Q_2 Q_0}{M_2 O^3} \vec{M_2 O}$$

$$\vec{F} = 9 \times 10^9 \times \begin{cases} \frac{2 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{0.05^3} \times 0.05 - \frac{3 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{0.032^3} \times 0.01 \\ \frac{3 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{0.032^3} \times 0.03 \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = 15.74 \vec{i} - 25.62 \vec{j}$$

2. Composantes du vecteur champ électrique \vec{E} et son intensité E.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} = k \frac{Q_1}{M_1 O^3} \vec{M_1 O} + k \frac{Q_2}{M_2 O^3} \vec{M_2 O} = (1.575 \vec{i} - 2.562 \vec{j}) \times 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\Rightarrow \|\vec{E}\| = E = 10^7 \sqrt{1.575^2 + 2.562^2} = 3 \times 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

Application 8 :

Quatre charges ponctuelles +Q, +Q, +2Q et +2Q sont placées aux sommets d'un rectangle de longueur a et de largeur 2a.

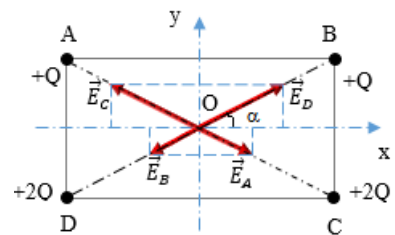
Déterminer le champ électrique \vec{E} au centre O du rectangle. Préciser la direction, le sens et la norme de $\|\vec{E}\|$. On place une charge q au centre O déduire la force électrostatique

Solution :

$$\vec{E}_T = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

Avec : $q_A = q_B = +Q$, $q_C = q_D = +2Q$ et $OA = OB = OC = OD$

$$\begin{cases} Ox: & E_A = E_B = k \times \frac{q_A}{OA^2} \\ Oy: & E_C = E_D = k \times \frac{q_C}{OA^2} \end{cases}$$



La projection sur les axes :

$$\begin{cases} Ox: & E_x = (E_A - E_B - E_C + E_D) \cos \alpha = 0 \quad (\text{par symétrie}) \\ Oy: & E_y = (-E_A - E_B + E_C + E_D) \sin \alpha = (-2E_A + 2E_C) \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ox: & E_x = 0 \quad (\text{par symétrie}) \\ Oy: & E_y = \frac{KQ}{OA^2} \times [-2 + 2 \times 2] \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow E_T = E_y = \frac{2KQ}{OA^2} \sin \alpha$$

$$\begin{cases} OA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{4}\right) = \frac{(a^2+b^2)}{4} \\ \sin \alpha = \frac{\frac{b}{2}}{OA} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_T = \frac{2KQ}{\frac{(a^2+b^2)}{4}} \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{8KQb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \vec{E}_T = \frac{8KQb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j} \end{cases}$$

I.3. DISTRIBUTIONS CONTINUES

I.3.1 ELEMENTS DE LONGUER, DE SURFACE, DE VOLUME

1. Coordonnées cartésiennes

Un point M quelconque de l'espace peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans la base associée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) (Fig. 2.6 (b)); s'écrit comme :

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (2.14)$$

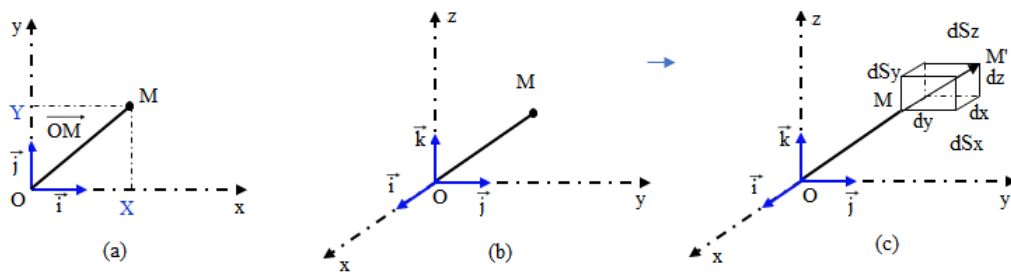


FIGURE 2.6 – Repère dans un plan (a), dans l'espace (b) et déplacement et volume élémentaires (c)

Le déplacement du point M(x.y.z) au point M'(x + dx, y + dy, z + dz) (Fig. 2.6 (C)), est décrit :

Elément de longueur	$\vec{MM}' = d\vec{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \Rightarrow$	$\begin{cases} \text{l'axe Ox : } d\vec{l} = dx \vec{i} \\ \text{plan (xOy) : } d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} \\ \text{l'espace : } d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{cases}$
Elément de surface	$dS = 2(dx dy + dy dz + dx dz) \Rightarrow$	$\begin{cases} dS_{xy} = dx dy, \text{ Plan (xOy)} \\ dS_{yz} = dy dz, \text{ Plan (yOz)} \\ dS_{zx} = dz dx, \text{ Plan (zOx)} \end{cases}$
Elément de volume		$d\tau = dx dy dz$

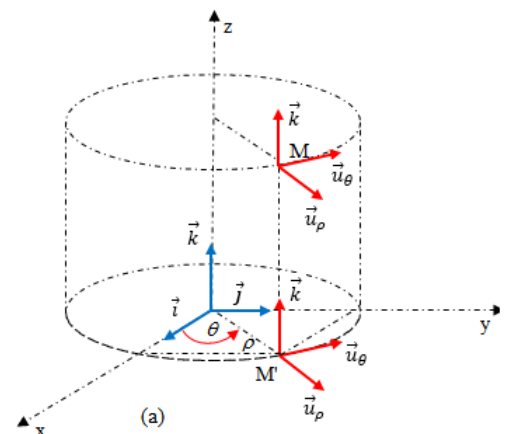
\vec{MM}' (diagonale principale) est un élément du vecteur de déplacement $d\vec{OM}$ ou $d\vec{l}$.

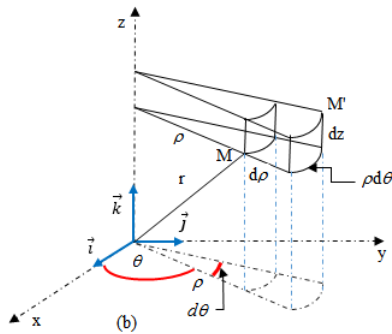
2. Coordonnées cylindriques

Un point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques ρ, θ et z dans la base associée au repère cylindrique ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k}$) (Fig. 2 (a)), d'écrit le vecteur position :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k} \quad (2.15)$$

\vec{MM}' (Fig. 2 (b)) est un élément du vecteur de déplacement du point M(ρ, θ, z) au point M'($\rho + d\rho, \theta + d\theta, z + dz$) noté $d\vec{OM}$. Avec $\rho \geq 0$, θ est entre $[0, 2\pi]$.





Elément de longueur	$d\vec{OM} = \vec{MM}' = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$
Elément de surface	$\begin{cases} dS_\rho = \rho d\theta dz, & \text{Si on fixe le rayon } \rho \\ dS_\theta = d\rho dz, & \text{Si l'angle } \theta \text{ est fixe} \\ dS_z = d\rho \rho d\theta, & \text{Si on fixe le côté } z \end{cases}$
Elément de volume	$d\tau = d\rho \rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz$

3. Cas particulier (Coordonnées polaires)

Les coordonnées polaires (Fig. 2.7) est un cas particulier des coordonnées cylindriques, où la cote $z = 0 \Rightarrow dz = 0$. Dans le plan (Oxy), le point M est repéré par une distance ρ et un angle θ ($0 \leq \rho \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$). On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho \tag{2.16}$$

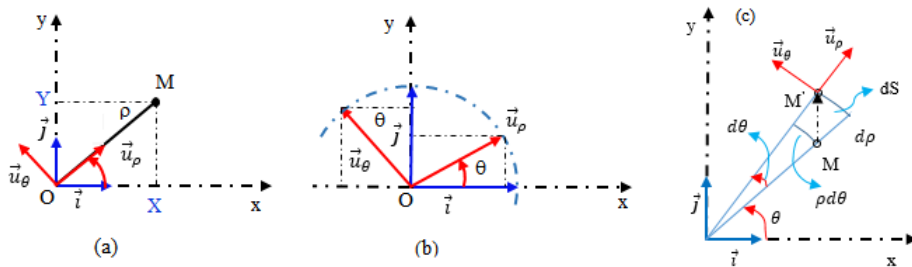


FIGURE 2.7 – Coordonnées polaires (ρ, θ, z) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, z)$

Elément de longueur	$\vec{MM}' = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta$
Elément de surface	$dS = \rho d\rho d\theta dz$

Application 9 :

- (a) Calculer la surface d'un cercle de centre O et de rayon R en coordonnées polaires.
 - (b) Calculer le volume d'un cylindre V de rayon R et de hauteur H.
- (a) Dans le plan (ρ, θ) , on peut montrer que l'élément de surface dS est un petit carré tangent au cercle de dimensions longitudinales $d\rho$ suivant \vec{u}_ρ et $\rho d\theta$ suivant l'axe transversal \vec{u}_θ en coordonnées polaires, finalement :

$$S = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = R^2 \pi \quad [\text{SI}]$$

- (b) L'élément de volume est un petit cube de coordonnées $d\rho, \rho d\theta, dz$:

$$d\tau = d\rho \cdot \rho d\theta \cdot dz \Rightarrow v = \iiint \rho d\rho \cdot d\theta \cdot dz = \int_0^R \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz$$

$$\Rightarrow v = \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^R \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [z]_0^H = \pi R^2 H \quad [\text{SI}]$$

4. Coordonnées sphériques

Un point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées sphériques r , θ et φ dans la base associée au repère sphériques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ (Fig. 2.8). On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \tag{2.17}$$

avec $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

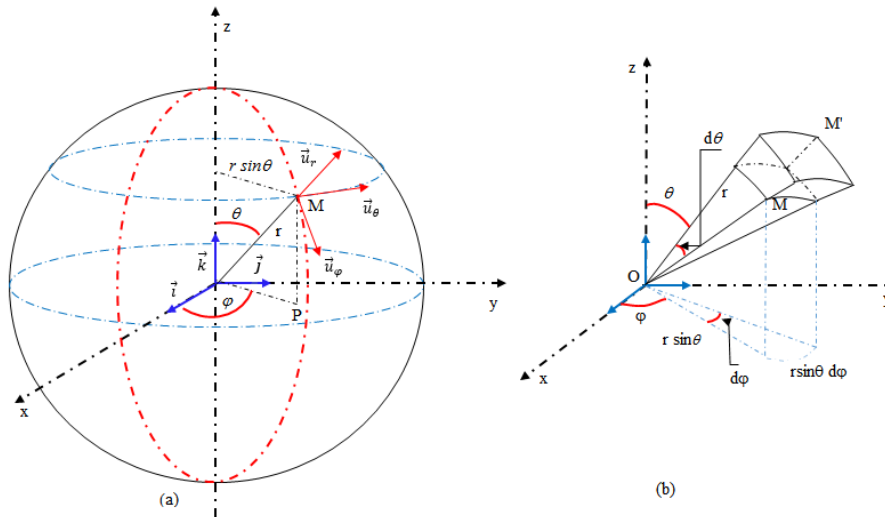


FIGURE 2.8 – Coordonnées sphériques (r, θ, φ) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

Le déplacement du point $M(r, \theta, \varphi)$ au $M'(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$. D'écrire :

Élément de longueur	$d\vec{OM} = \vec{MM}' = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$
Élément de surface	$\left\{ \begin{array}{l} dS = r d\theta r \sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \text{ si on fixe } r \\ dS = r \sin\theta d\varphi dr, \text{ si on fixe } \theta \\ dS = r dr d\theta, \text{ si on fixe } \varphi \end{array} \right.$
Élément de volume	$d\tau = dr r d\theta r \sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Application 10 :

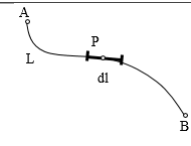
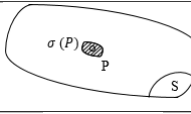
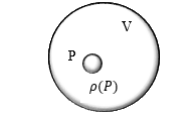
Calculer le volume d'une sphère v de rayon R . Intégrale triple de volume :

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned} v &= \iiint r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \\ &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3} (1 + 1)(2\pi) = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

I.3.2 Distributions continues de charge :

hypothèse d'une charge élémentaire dq , où quelle on peut appliquer les formules établies dans une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution. On définit ainsi les densités (Voir Tableau 2.1) :

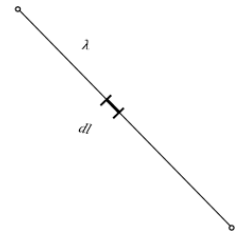
Distributions	Formules	Figures
linéique	$\lambda = dq/dl \Rightarrow dq = \lambda dl$	
surfaique(surperficielle)	$\sigma = dq/dS \Rightarrow dq = \sigma dS$	
volumique	$\rho = dq/d\tau \Rightarrow dq = \rho d\tau$	

Application 11 : Un fil de longueur $l = 50\text{cm}$ est chargé uniformément d'une charge $q = 1\mu\text{C}$. Quelle est la densité linéique de charges λ portée par le fil.

La densité de la charge dq dans l'élément dl au point P est :

$$\lambda(p) = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda(p) dl \Rightarrow q = \int_0^l \lambda(p) dl$$

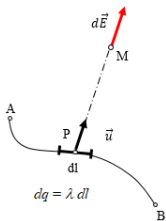
$$q = \lambda [l]_0^l = \lambda \times l \Rightarrow \lambda = \frac{q}{l} = \frac{10^{-6}}{50 \times 10^{-2}} = 2 \times 10^{-6} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}} \right]$$



I.3.3 Champ électriques créés par des distributions continues

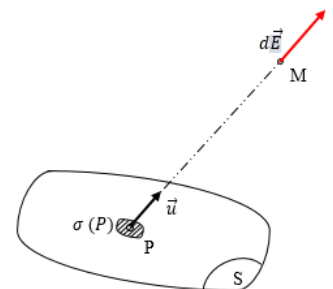
Dans le cas de ces distributions continues, chaque portion de ligne, surface ou volume portant la charge dq crée un champ élémentaire $d\vec{E}$. Pour obtenir le champ électrique total en un point M, il faut sommer (de façon continue) ces champs élémentaires sur l'ensemble de la ligne, de la surface ou du volume. Ainsi, on a recourt à des intégrales :

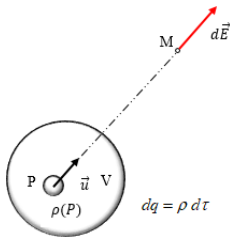
Remarque : Ces relations sont très générales et ne sont pas utilisables directement. Il convient d'abord d'analyser les symétries de la distribution de charges pour simplifier les calculs.



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P) dl}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P) dl}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \quad (2.18)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) dS}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) dS}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \quad (2.19)$$





$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) d\tau}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) d\tau}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \quad (2.20)$$

I.3.4 Potentiel Créés par des distributions continues

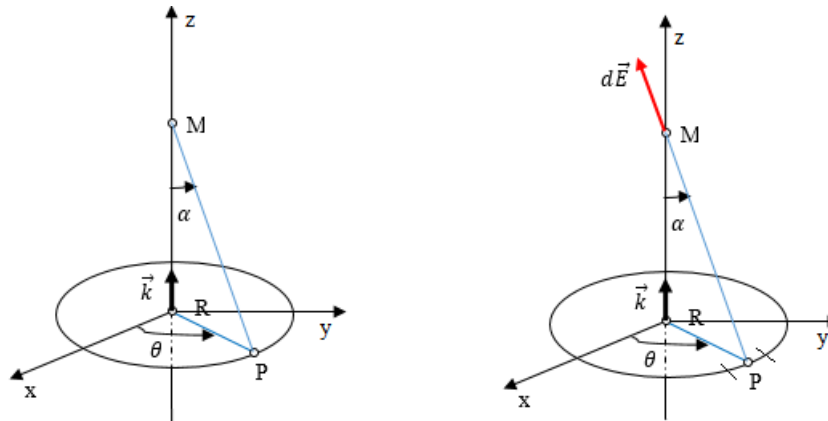
$$\text{Distribution linéique } V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P) dl}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P) dl}{\|\vec{PM}\|} \quad (2.21)$$

$$\text{Distribution surfacique } V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) dS}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) dS}{\|\vec{PM}\|} \quad (2.22)$$

$$\text{Distribution volumique } V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) d\tau}{\|\vec{PM}\|} \quad (2.23)$$

Application 12 : Soit une boucle circulaire de centre O, de rayon R, uniformément chargée avec une densité linéique $\lambda_0 = \lambda$. Calculer le champ crée par cette distribution de charges, en un point M de l'axe de la boucle :

1. A partir du potentiel électrostatique.
2. Directement.



1. Le champ électrostatique à partir du potentiel :

Le potentiel $dV(M)$ créé en un point $M(0, 0, z)$ par la charge $dq = \lambda dl$ portée par un élément dl de la boucle entourant P est :

La charge $dq = \lambda dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le potentiel $V(M)$:

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl}{\|\vec{PM}\|}$$

$$\text{avec } dl = R d\theta \text{ et } \|\vec{PM}\| = \sqrt{R^2 + Z^2}$$

Le potentiel $V(M)$ est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle :

$$V(M) = \oint_C dV(M) = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + Z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + Z^2}} [\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + Z^2}} = V(0, 0, Z) = V(0, 0, -Z) \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{gradV} = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\lambda_0 R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = \vec{E}(0, 0, z) = -\vec{E}(0, 0, -z) \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

2. Direct le champ en un point M :

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\vec{z}'z$. Tout plan contenant l'axe $\vec{z}'z$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ E en un point de l'axe $\vec{z}'z$ est porté par \vec{k} :

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M la champ $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = E_z \vec{k}$$

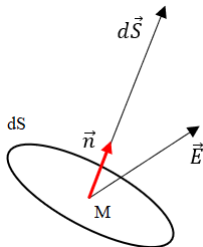
Le champ \vec{E} étant porté par \vec{K} , seule la composante $d\vec{E}_z$ est à considérer :

$$d\vec{E}_z = dE_z \vec{k} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM} \vec{k}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{R^2 + z^2} \cos\alpha}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{avec} \quad \cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\vec{E}(M) = 2 \int_0^\pi dE_z \vec{k} = 2 \frac{\lambda_0 R z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\theta = \frac{\lambda_0 R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

I.3.5 FLUX DU CHAMP ÉLECTRIQUE

I.3.5.1 Définition



Par définition, le flux du champ électrostatique \vec{E} à travers une surface (S) , noté $\phi_s(\vec{E})$ est la quantité scalaire définie comme :

$$\phi_s(\vec{E}) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.24)$$

Si la surface est fermée, le flux s'écrit :

$$\phi_s = \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) \quad [V.m] \quad (2.25)$$

I.3.5.2 Flux du champ créé par une charge ponctuelle

Calcul du flux, à travers une surface (S) quelconque, du champ $E(M)$ créé par une charge ponctuelle placée en un point O.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \vec{n} \cdot \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\phi_{(S)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega \Rightarrow \phi_{(S)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (2.26)$$

Conséquences :

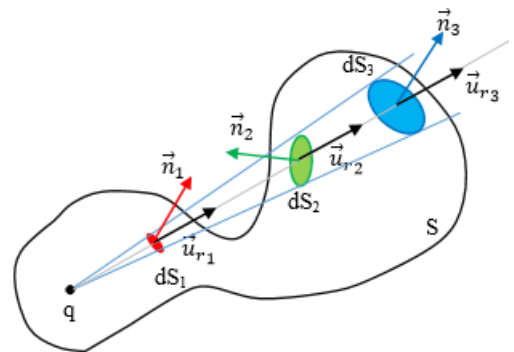
- Le flux de \vec{E} ne dépend que de l'angle solide sous lequel est vue la surface.
- Le flux de \vec{E} est indépendant de la distance surface-source : dS augmente en r^2 mais de \vec{E} diminue en $1/r^2$.

I.3.5.3 Flux sortant d'une surface fermée

Soit S une surface fermée. Soit q une charge ponctuelle placée en un point O ; cette charge se trouve soit à l'intérieur de S soit à l'extérieur. Nous nous proposons dans les deux cas, de calculer le flux de \vec{E} créé par la charge q , sortant de S.

a) Charge située à l'intérieur de S

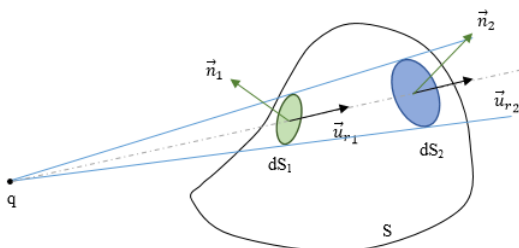
Dans ce cas, du point O où se trouve la charge q , on voit la surface S sous l'angle solide, cette intégrale correspond à l'angle solide $\Omega = \int d\Omega = 4\pi$ sous lequel on voit l'espace tout entier.



$$\begin{aligned} \Phi &= \int (d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (d\Omega_1 - d\Omega_2 + d\Omega_3) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{4\pi q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.27)$$

b) Charge située à l'extérieur de S



Si la charge q se trouve à l'extérieur de S, un cône élémentaire issu de la charge coupe un nombre pair de fois la surface, les flux élémentaires correspondants sont :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int (d\Phi_1 + d\Phi_2) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (-d\Omega_1 + d\Omega_2) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \Phi = 0 \quad (2.28)$$

I.3.6 THÉORÈME DE GAUSS

I.3.6.1 Enoncé

Le flux du champ électrostatique, créé par une distribution de charges, à travers une surface quelconque (S) fermée, est égal à la somme algébrique des charges présentes à l'intérieur de (S) divisée par ϵ_0 :

$$\phi(S) = \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} dS(M) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \quad (2.29)$$

$\vec{E}(M)$ est le champ électrostatique créé par toute la distribution de charges (comprise dans le volume délimité par la surface (S)) aux points M de la surface (S). $dS(M)$ est un élément de surface pris autour de M.

I.3.6.2 Conditions d'applications du théorème de Gauss

Le théorème est utilisé au calcul du champ dans le cas de symétrie très élevée. Pour cela le choix de la surface (S) doit satisfaire aux conditions suivantes :

1. La forme de (S), simple et facile à calculer.
2. L'orientation du champ électrostatique E sur (S), connue.
3. Le module du champ E sur (S), constant.

Dans le cas général. on calcule le champ E par ses formules de définition ou bien on calcule le potentiel et on le déduit.

Application 13 :

Soit une charge ponctuelle Q, Positive, placée en un point O. A partir du théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique au point P.

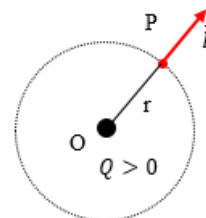
Soit (S) une sphère centrée en O et de rayon $OP = r$. Q la crée en P un champ électrique E qui, par raison de symétrie, possède le même module en tout point de la sphère. D'après le théorème de Gauss :

$$\phi(S) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int}$$

Tandis que : $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ et $\vec{E} = C^{st}$

$$\phi(S) = \iint_{(S)} E dS = E \iint_{(S)} dS = E 4\pi r^2$$

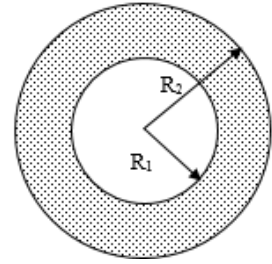
$$\begin{cases} \phi = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \\ \sum Q_{int} = Q \end{cases} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



application 14 :

Soient deux sphères concentriques de centre O de rayons R_1 et R_2 respectivement tel que $R_1 < R_2$ (Figure ci-dessous).

1. En utilisant le théorème de GAUSS : Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace pour une distribution volumique de charge répartie uniformément entre ces deux sphères.
2. Dédurre le potentiel électrique en tout point de l'espace.

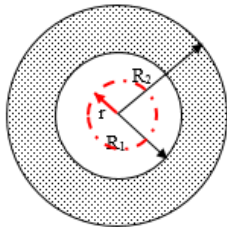


1. Le champ électrostatique en tout point de l'espace :
Appliquons le théorème de Gauss :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \Rightarrow E S_G = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

◆ $0 < r < R_1$

La première sphère de Gauss de rayon r , on a :



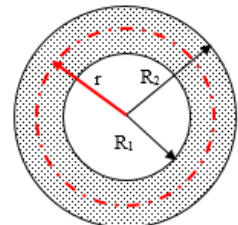
$$\begin{cases} E_1 S_G = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \\ S_G = 4 \pi r^2 \\ \sum Q_{int} = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0 S_G} = 0 \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

◆ $R_1 < r < R_2$

Pour la deuxième sphère de Gauss de rayon r , on trouve que :

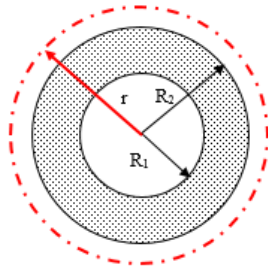
$$\begin{cases} E_2 S_G = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \\ S_G = 4 \pi r^2 \\ \sum Q_{int} = \iiint_V \rho \, d\tau = 4 \pi \rho \int_{R_1}^r r^2 dr = 4 \pi \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_1}^r = \frac{4}{3} \pi \rho [r^3 - R_1^3] \end{cases} \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0 S_G} = \frac{\frac{4}{3} \pi \rho (r^3 - R_1^3)}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_2 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \\ \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \vec{e}_r \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$



◆ $r > R_2$

La troisième sphère de Gauss de rayon r , on a :



$$\begin{cases} E_3 S_G = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \\ S_G = 4 \pi r^2 \\ \sum Q_{int} = \iiint_V \rho d\tau = 4 \pi \rho \int_{R_2}^{R_1} r^2 dr = \frac{4}{3} \pi \rho [R_2^3 - R_1^3] \end{cases}$$

Alors :

$$E_3 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0 S_G} = \frac{\frac{4}{3} \pi \rho (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_3 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} \right) \\ \vec{E}_3 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} \right) \vec{e}_r \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

2. Déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace :

La relation champ-potential donne en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right)$$

Vu les symétries du champ $E_\theta = E_\varphi = 0$ donc : $V(r, \theta, \varphi) = V(r)$ et $E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V(r) = \int dV = -\int E dr$.

$$\begin{cases} \text{pour } 0 < r < R_1 : & V_1(r) = -\int E_1 dr = C_1 \\ \text{pour } R_1 < r < R_2 : & V_2(r) = -\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \int \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr = -\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + C_2 \\ \text{pour } r > R_2 : & V_3(r) = -\frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3 \epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3 \epsilon_0} \frac{1}{r} + C_3 \end{cases}$$

La référence de potentiel ne peut pas être prise à l'infini, puisqu'il y existe des charges. On choisit $V(r \rightarrow \infty) = 0$ qui donne :

$$V_2(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3 \epsilon_0} \frac{1}{\infty} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow V_3(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3 \epsilon_0 r}$$

$$V_2(R_2) = V_1(R_2) \Rightarrow \frac{\rho R_2^2}{3 \epsilon_0} - \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 R_2} = C_2 - \frac{\rho R_2^2}{3 \epsilon_0} - \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 R_2}$$

$$\Rightarrow C_2 = -2 \frac{\rho R_2^2}{3 \epsilon_0} \Rightarrow V_2(r) = -\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} + 2R_2^2 \right]$$

$$V_1(R_1) = V_2(R_1) \Rightarrow -\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left[\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1} + 2R_2^2 \right] = C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left[\frac{3 R_1^2}{2} + 2R_2^2 \right] \Rightarrow V_1(r) = -\frac{\rho}{6 \epsilon_0} [3 R_1^2 + 4 R_2^2]$$